1 Probabilités conditionnelles

1.1 Compétences Attendues

- Construire un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Utiliser un arbre pondéré ou un tableau pour calculer une probabilité.
- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs (tirage au sort avec équiprobabilité d'un individu dans une population).
- Dans des cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Distinguer en situation $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$, par exemple dans des situations de type "faux positifs".
- Représenter une répétition de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.

1.2 Exercices

Exercice 1:
On donne deux événements incompatibles A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0,3$ et $\mathbb{P}(B) = 0,5$. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$; $\mathbb{P}(A \cup B)$; $\mathbb{P}(\bar{A})$ et $\mathbb{P}(\bar{B})$

Exercice 2:
On donne deux événements incompatibles A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0,3$ et $\mathbb{P}(B) = 0,5$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,1$. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$; $\mathbb{P}(\bar{A})$ et $\mathbb{P}(\bar{B})$

Exercice 3:
120 élèves de Première technologique se répartissent comme l'indique le tableau suivant.

	Filles	**Garçons**
Pratiquant un sport	65	23
Ne pratiquent pas un sport	21	11

On tire la fiche d'un élève au hasard parmi les 120 fiches. Il y a équiprobabilité des tirages. Quelle est la probabilité :

1. p_1, que ce soit une fille pratiquant un sport ?
2. p_2, que ce soit une fille ?
3. p_3, que ce soit un garçon ?

Exercice 4:
Une étude de l'organisation mondiale du tourisme montre que, pour 1 000 touristes venus en Europe l'année dernière, 14% sont venus en France. Parmi les touristes qui sont venus en France, 25% ont dépensé plus de 900 euros pour leur séjour. Parmi les touristes qui ne sont pas venus en France, 15% ont dépensé plus de 900 euros pour leur séjour.

1. Reproduire le tableau suivant et le compléter

Nombre de touristes	**Venus en France**	**Non venus en France**	**Total**
Ayant dépensé plus de 900 euros			
Ayant dépensé moins de 900 euros			
Total			1000

2. On choisit au hasard un touriste venu en Europe. Tous les touristes ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants.
   - F : "Le touriste a choisi comme destination la France"
   - A : "Le touriste a dépensé plus de 900 euros popur son séjour"

   (a) Calculer $\mathbb{P}(\bar{F} \cap A)$

   (b) Calculer la probabilité que le touriste ait dépensé plus de 900 euros pour son séjour

Exercice 5:
100 élèves de Première technologique se répartissent de la façon suivante.

	Filles	**Garçons**	**Total**
Pratiquent un sport	30	50	80
Ne pratiquent aucun sport	12	8	20
Total	42	58	100

On rencontre au hasard un des élèves 100 élèves. Tous les élèves ont la même probabilité d'être rencontrés. On considère les événements suivants :

- F : "L'élève rencontré est une fille"
- G : "L'élève rencontré est un garçon"
- S : "L'élève rencontré pratique un sport"

1. Traduire par une phrase chacun des deux événements $F \cap S$ et $G \cap \bar{S}$
2. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(S)$; $\mathbb{P}(F \cap S)$; $\mathbb{P}(\bar{S})$ et $\mathbb{P}(G \cap \bar{S})$
3. Déterminer, à l'aide du tableau, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_S(F)$ et $\mathbb{P}_{\bar{S}}(G)$
4. Calculer la probabilité que, sachant que l'élève est un garçon, il pratique un sport. Arrondier la résultat à 10^{-2}

Exercice 6:
Un sondage est effectué dans une société comprenant 40% de cadres et 60% d'employés. On sait que 20% des cadres et 10% des employés de cette société parlent l'anglais.

1. On considère un groupe de 100 salariés. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant.

	Salariés parlant anglais	**Salariés ne parlant pas anglais**	**Total**
Nombre de cadres			
Nombre d'employés			
Total			100

2. On choisit un salarié au hasard parmi les 100. Tous les employés ont la même probabilité de chacun des événements suivants :
   (a) E : "Le salarié est un employé"
   (b) F : "Le salarié est un cadre sachant parler l'anglais"
   (c) G : "Le salarié est un employé sachant parler l'anglais"
   (d) H : "Le salarié sait parler l'anglais"
3. Calculer $\mathbb{P}_H(E)$. Arrondir à 10^{-3}

Exercice 7:
Une maladie atteint 3% d'une population de 30 000 habitants. On soumet cette population à un test.
Parmi les biens portants, 2% ont un test positif.
Parmi les personnes malades, 49 ont un test négatif.

1. Reproduire puis compléter le tableau suivant:

	Malades	**Bien portants**	**Total**
Test positif			
Test négatif			
Total			30000

2. On choisit au hasard une personne de cette population. On considère les événements T et M suivants :
   - T : "Le test est positif pour la personne choisie"
   - M : "La personne choisie est malade".

   (a) Calculer les probabilités des événements suivants : $\bar{T}$; $T \cap M$ et $\bar{T} \cap M$
   (b) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(\bar{T})$; $\mathbb{P}(T \cap M)$ et $\mathbb{P}(\bar{T} \cap M)$
   (c) Calculer la probabilité que la personne choisie soit malade ou ait un test positif.
   (d) Déterminer, à l'aide du tableau, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_T(M)$ et $\mathbb{P}_M(T)$.
   (e) Calculer la probabilité qu'une personne soit malade sachant qu'elle a eu un test négatif.

Exercice 8:
Une agence de voyage propose deux formules week-end pour se rendre à Londres depuis Paris.
Les clients choisissent leur moyen de transport : train ou avion.
De plus, s'ils le souhaitent, ils peuvent compléter leur formule par l'option visites guidées.
Une étude a produit les données suivantes :
• 30 % des clients optent pour l'avion;
• Parmi les clients ayant choisi le train, 34 % choisissent aussi l'option " visites guidées".
• 23 % des clients ont choisi à la fois l'avion et l'option " visites guidées".

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres.
On considère les événements suivants :
• A : le client a choisi l'avion.
• V : le client a choisi l'option " visites guidées".

1. Déterminer $P_A(V)$
2. Démontrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option " visites guidées" est environ égale à 0,468.
3. Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option " visites guidées". Arrondir le résultat au centième.
4. On interroge au hasard deux clients de manière aléatoire et indépendante. Quelle est la probabilité qu'aucun des deux ne prennent l'option " visites guidées" ? On donnera les résultats sous forme de valeurs approchées à 10^{-3} près.

Exercice 9:
Une chaîne de salons de coiffure propose à ses clients qui viennent pour une coupe, deux prestations supplémentaires cumulables :
• Une coloration naturelle à base de plantes appelée couleur-soin ,
• Des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées " effet coup de soleil ".

Il apparaît que :
⋄ 48 % des clients demandent une " couleur-soin ".
⋄ Parmi ceux qui ne veulent pas de " couleur-soin " , 20 % des clients demandent un " effet coup de soleil ".
⋄ Par ailleurs, 35 % des clients demandent une " couleur-soin " et un " effet coup de soleil ".
On interroge un client au hasard.
On notera C l'événement : " Le client souhaite une " couleur-soin ".
On notera E l'événement : " Le client souhaite un " effet coup de soleil ".

1. Donner les valeurs de $P(C)$, $P(C \cap E)$ et $P_{\bar{C}}(E)$.
2. Calculer la probabilité que le client ne souhaite ni une " couleur-soin " , ni un " effet coup de soleil ".
3. Calculer la probabilité qu'un client choisisse l'" effet coup de soleil " sachant qu'il a pris une " couleur-soin ".
4. Montrer que la probabilité de l'événement E est égale à 0,454 (à 10^{-3} près).
5. Les événements C et E sont-ils indépendants ?
   On donnera les résultats sous forme de valeurs approchées à 10^{-3} près.

Exercice 10:
On a placé dans un panier des poivrons jaunes ou rouges, provenant de France ou d'Espagne selon la répartition suivante :

	Jaune	**Rouge**	**Total**
France	1	2	3
Espagne	4	5	9
Total	5	7	12

On choisit au hasard un poivron dans le panier. On définit les événements :

- F : "Le poivron provient de France".
- J : "Le poivron est jaune".

1. (a) Combien y a-t-il de poivrons jaunes ?
   (b) Combien y a-t-il de poivrons jaunes provenant de France ?
   (c) En déduire la probabilité $\mathbb{P}_J(F)$.
2. (a) Combien y a-t-il de poivrons provenant de France ?
   (b) Déterminer $\mathbb{P}_F(J)$.

Exercice 11:
Un lycée comport 200 professeurs dont la répartition est donnée par le tableau ci-dessous.

	Hommes	**Femmes**	**Total**
Moins de 30 ans	28	26	54
Plus de 30 ans	42	104	146
Total	70	130	200

On choisit au hasard un professeur de ce lycée. On définit les événements :

- H : "Le professeur est un homme".
- J : "Le professeur a moins de 30 ans".

1. (a) Quelle est la valeur de $Card(H)$?
   (b) Déterminer $Card(H \cap J)$.
   (c) En déduire la probabilité $\mathbb{P}_H(J)$.
2. (a) Quel est le nombre d'issues qui réalisent J ?
   (b) Quel est le nombre d'issues qui réalisent $\bar{H} \cap J$?
   (c) En déduire la probabilité que le professeur choisit soit une femme sachant que ce professeur a moins de 30 ans.

Exercice 12:
Un club de vacances est constitué de 300 adhérents qui pratiquent chacun une activité et une seule parmi les trois activités suivantes : la natation, l'escalade ou le VTT.

- 35% des adhérents sont des filles.
- 30% des adhérents pratiquent le VTT.
- 10% des adhérents pratiquent l'escalade et parmi eux 60% sont des garçons.
- Il y a deux fois plus de garçons que de filles qui pratiquent le VTT.

1. Reproduire le tableau suivant et le compléter.

	Natation	**Escalade**	**VTT**	**Total**
Fille				
Garçon				
Total				300

2. On choisit un adhérent au hasard. On note :
   - N : "L'adhérent pratique la natation".
   - E : "L'adhérent pratique l'escalade".
   - V : "L'adhérent pratique le VTT".
   - F : "L'adhérent est une fille".

   (a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(V)$.

   (b) Calculer la probabilité $\mathbb{P}_F(E)$.

   (c) Déterminer la probabilité que l'adhérent soit un garçon sachant qu'il pratique la natation.

Exercice 13:
Avant de partir en congé, un chapelier étourdi a rangé les 80 chapeaux de sa boutique dans des cartons pour les protéger de la poussière mais en oubliant de les étiqueter. 65% des chapeaux sont en paille (événements noté L) et les trois quarts d'entre eux sont ornés de fleurs ; par ailleurs, la moitié des chapeaux ne comportent pas de fleurs (événement noté $\bar{F}$).

1. Regrouper ces informations dans un tableau d'effectif à double entrée.

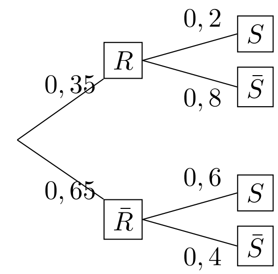
2. On ouvre au hasard un carton à chapeau.

   (a) Quelle est la probabilité que ce chapeau soit orné de fleurs ? Même question sachant qu'il est en paille.

   (b) Quelle est la probabilité que ce chapeau ne soit pas en paille et ne comporte pas de fleur ?

   (c) Quelle est la probabilité que ce chapeau soit en paille sachant qu'il est orné de fleurs ?

Exercice 14:
Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilités suivant :



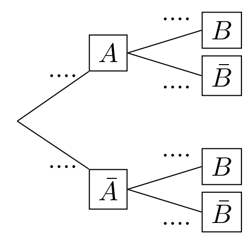
1. Calculer $\mathbb{P}(R \cap S)$ et $\mathbb{P}(\bar{R} \cap S)$.

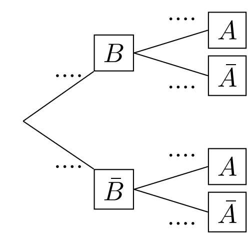
2. Justifier que $\mathbb{P}(S) = 0,46$.

3. Calculer $\mathbb{P}_S(R)$ et $\mathbb{P}_{\bar{S}}(R)$.

4. Les événements S et R sont-ils indépendants ?

Exercice 15:
A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0,4$, $\mathbb{P}_A(B) = 0,6$ et $\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = 0,8$.





1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité de gauche à partir des données de l'énoncé.

2. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$.

3. En déduire $\mathbb{P}(B)$.

4. Calculer $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_{\bar{B}}(A)$.

5. Recopier et compléter l'arbre de probabilité de droite.

Exercice 16:
Dans un jeu de 32 cartes, qui compte 12 figures, on extrait au hasard successivement et sans remise deux fois une carte . On note F_1 l'événement "la première carte extraite est une figure" et F_2 l'événement "la seconde carte extraite est une figure".

1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

2. Déterminer la probabilité que les deux cartes extraites soient des figures.

3. Justifier que la probabilité que la deuxième carte extraite soit une figure est égale à $0,375$.

4. En déduire la probabilité que la première carte extraite soit une figure, sachant que la seconde est une figure.

Exercice 17:
En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 48% affirment vouloir voter pour le candidat A, les autres pour le candidat B. Compte tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10% des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent pour le candidat B, tandis que 20% des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.
On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note A l'événement "la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A", B l'événement "la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B" et V l'événement "la personne interrogée dit la vérité".

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. (a) Déterminer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
   (b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, déterminer la probabilité qu'elle affirme vouloir pour le candidat A.
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote pour le candidat A est $0,536$.

Exercice 18:
Une roulette non truquée comporte 37 cases numérotées de 0 à 36, toutes équiprobables.

1. (a) Quelle est la probabilité que la boule lancée s'arrête sur un nombre premier ?
   (b) Les événements A "la boule lancée s'arrête sur un nombre premier" et "la boule lancée s'arrête sur un nombre impair" sont-ils indépendants ?
2. (a) Quelle est la probabilité que la boule lancée s'arrête sur un nombre premier sachant qu'elle s'est arrêtée sur un nombre impair ?
   (b) Quelle est la probabilité que la boule lancée s'arrête sur un nombre impair sachant qu'elle s'est arrêtée sur un nombre premier ?

Exercice 19:
Un jardinier dispose d'un lot de bulbes de tulipes : 40% sont à fleur rouge, 30% à fleur jaune et le reste est à fleur blanche. D'autre part, 85% des bulbes à fleur rouge, 90% des bulbes à fleur jaune et 80% des bulbes à fleur blanche donnent une fleur une fois plantées.
On choisit un bulbe au hasard dans ce lot. On note R l'événement "le bulbe est à fleur rouge", J l'événement "le bulbe est à fleur jaune" et F l'événement "le bulbe fleurit".

1. (a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
   (b) Justifier que la probabilité que le bulbe fleurisse une fois planté est égale à $0,85$.
2. (a) Sans calcul, justifier que les événements R et F sont indépendants.
   (b) Les événements J et R sont-ils indépendants ?

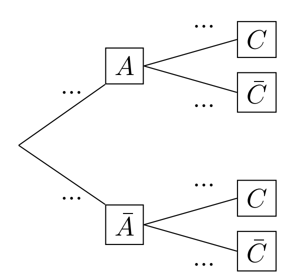
Exercice 20:
Le cuisinier d'un centre de vacances a confectionné des beignets pour le goûter des enfants :

- 30% des beignets sont à l'ananas, les autres sont aux pommes ;
- 35% des beignets à l'ananas sont aromatisés à la cannelle, ainsi que 45% des beignets aux pommes.

On choisit un beignet au hasard. On admet que chaque beignet a la même probabilité d'être choisi. On définit les événements suivants :

- A : "le beignet choisi est à l'ananas".
- C : "le beignet choisi est aromatisé à la cannelle".

1. Donner la probabilité de $\mathbb{P}_A(C)$ à partir des données de l'énoncé.
2. Reproduire et compléter l'arbre de probabilité ci-contre :
3. Définir par une phrase l'événement $A \cap C$ puis calculer sa probabilité.
4. Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à $0,42$.
5. Calculer la probabilité que le beignet soit à l'ananas, sachant qu'il est aromatisé à la cannelle.



1.3 Algorithmes et Python

Exercice 21:
On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et de deux urnes : l'urne A contient 2 boules rouges et 3 vertes et l'urne B contient 1 boule rouge et 2 vertes. On lance le dé et si le résultat est 1 ou 2, on tire une boule dans l'urne A, sinon on tire une boule dans

l'urne B.
On considère que la partie est gagnante si on tire une boule rouge. On note les événements S "le dé donne 1 ou 2" et R "on tire une boule rouge".

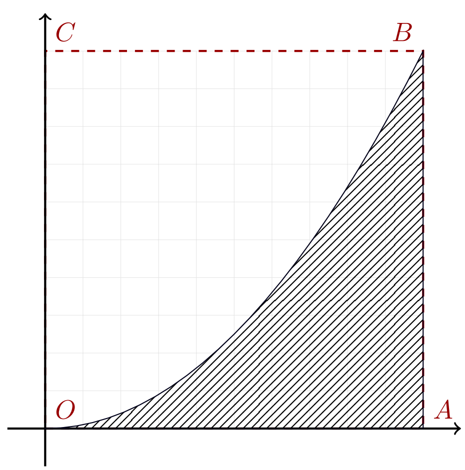
1. A l'aide des informations de l'énoncé, donner les valeurs de $\mathbb{P}(S)$, $\mathbb{P}_S(R)$ et $\mathbb{P}_{\bar{S}}(R)$.
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant simulant une partie :

```
D = randint(1,6)
if D<=2 :
    U = randint(....)
    if U<=.... :
        print("gagne")
    else :
        print("perdu")
else :
    U = ....
    if U<=1 :
        print("....")
    else :
        print("....")
```

3. Modifier cet algorithme pour simuler n partie (où $n \in \mathbb{N}^*$) et pour qu'il compte le nombre de parties gagnées.

Exercice 22:

On a représenté ci-contre un carré $OABC$ et la fonction carré. On a hachuré la partie du carré située sous la parabole.



1. On prend au hasard un point $M(x;y)$ dans le carré $OABC$, d'aire une unité.
   (a) A quel intervalle appartiennent les nombres réels x et y?
   (b) Quelle condition doivent vérifier x et y pour que le point M soit situé dans la partie hachurée ?
2. On souhaite estimer l'aire de la partie hachurée. Pour y parvenir, on prend au hasard 1000 points dans le carré $OABC$ et on déterminer la proportion des points appartenant à la partie hachurée.
   (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin de déterminer cette proportion P.

```
C=0
for k in range(1,....):
    x=random(....)
    y=random(....)
    if ....:
        C+=1
P=....
```

   (b) Programmer l'algorithme et donner une estimation de l'aire de la partie de la partie hachurée.
   (c) Comment obtenir une meilleur estimation ?
3. On considère le quart de dique de centre O et de rayon 1, situé dans le carré $OABC$, noté D.
   (a) Quelle est l'aire du quart de disque D?
   (b) Le cercle de centre O et de rayon 1 a pour équation $x^2 + y^2 = 1$. Recopier et compléter la phrase : *Un point $M(x;y)$ appartient au qart de disque D si et seulement si $x^2 + y^2 ... 1$.*
   (c) Rédiger un algortihme qui permet d'obtenir une estimation du nombre π.

1.4 Approfondissements

Exercice 23:
On estime que 51% des nouveau-nés sont des garçons et on considère que les naissances sont indépendantes. On étudie des familles avec trois enfants. On choisit une famille au hasard et on note F_k l'événement "le $k-ieme$ enfant est une fille", où $k \in \{1, 2, 3\}$.

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. Quelle est la probabilité que la famille ait trois garçons ? ait au moins une fille ?
3. (a) Quelle est la probabilité que le benjamin de la famille soit un garçon ?
   (b) En déduire la probabilité que l'aînée soit une fille, sachant que le benjamin est un garçon.