1 Variables aléatoires

1.1 Compétences Attendues

- Interpréter en situation les écritures $\{X = a\}$, $\{X \leq a\}$, $\mathbb{P}(X = a)$, $\mathbb{P}(X \leq a)$. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Calculer une espérance, une variance, un écart type.
- Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème (mise pour un jeu équitable. . .)
- Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire.

1.2 Exercices

Exercice 1:
On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Si l'on obtient un 7, un 8, un 9 ou un 10, on perd 3 euros. Si l'on obtient un Valet, une Dame ou un Roi, on gagne 2 euros. Si l'on obtient un as, on gagne 5 euros. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur. Donner l'ensemble des valeurs prises par X.

Exercice 2:
Une urne contient 5 boules jaunes, 3 boules rouges et 4 boules vertes. On tire simultanément trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de trois boules, associe le nombre de boules rouges obtenues.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Décrire l'événement $\{X = 2\}$ puis l'événement $\{X < 1\}$.

Exercice 3:
On lance un dé cubique équilibré. On gagne 5 euros si l'on obtient la face numérotée "3" et on gagne 1 euro dans les autres cas. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur. Donner $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 5)$.

Exercice 4:
Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau :

x_i	2	5	10
$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$	$0,15$	$0,5$	$0,35$

1. Vérifier que $\sum p_i = 1$. *Ce résultat est général.*
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.
3. Calculer l'écart-type de la variable aléatoire X.

Exercice 5:
On note X la variable aléatoire qui, à chaque jour, associe le nombre de voitures neuves vendues par un concessionnaire. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,45$	$0,3$	$0,15$	p

1. Donner la probabilité $\mathbb{P}(X = 1)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1)$.
3. Calculer le réel p.

Exercice 6:
Une entreprise de fournitures industrielles commercialise en particulier un certain modèle de pièces pour pompe hydraulique.
On appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque jour ouvrable tiré au hasard dans une année le nombre de pièces vendues. On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est définie par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,10$	$0,16$	$0,25$	$0,3$	$0,13$	$0,05$	$0,01$

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'écart-type de la variable aléatoire X.
3. Interpréter le résultat dans le contexte de l'expérience aléatoire X.

Exercice 7:
Une urne contient trois boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 3.
Un jeu consiste à extraire successivement deux boules de l'urne, la première boule étant remise avant d'extraire la seconde.
On appelle tirage, tout couple (a, b) où a est le numéro de la première boule extraite et b celui de la seconde.
On admet que tous les tirages sont équiprobables.

1. Préciser l'ensemble des neuf tirages possibles (on pourra s'aider d'un tableau).
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage (a, b), associe le produit ab.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par X?
   (b) Présenter sous forme de tableau la loi de probabilité de X
   (c) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$.

(d) Calculer l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 8:
Un vendeur entre 0 et 4 voitures d'un certain modèle en une semaine. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque semaine choisie au hasard parmi les 52 semaines d'une année, associe le nombre de voitures vendues cette semaine. X suit la loi de probabilité ci-dessous :

Voitures vendues	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$0,26$	$0,25$		$0,15$	$0,05$

1. Calculer la probabilité de vendre exactement deux voitures en une semaine
2. Justifier que la probabilité de vendre au moins deux voitures en une semaine est égale à 0,51.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 2)$
4. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. En dduire une estimation du nombre moyen de voitures vendues en une année (c'est-à-dire 52 semaines).
5. Calculer l'écart-type de cette variable aléatoire.

Exercice 9:
Un sac contient un jeton marqué "2" et un jeton marqué "3". On tire un jeton, on note son numéro, on le remet dans le sac, puis on effectue de même un second tirage. Ondéfinit alors la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le produit des deux numéros obtenus.

1. Déterminer l'ensemble Ω des issues possibles de cette expérience puis l'ensemble E des valeurs prises par X.
2. Décrire l'événement $\{X=3\}$ et calculer sa probabilité.
3. Décrire l'événement $\{X<8\}$ et calculer sa probabilité.

Exercice 10:
Une urne contient deux jetons noirs et huit jetons blancs. On tire au hasard successivement et avec remise deux jetons de l'urne.

1. Construire un arbre de probabilités illustrant la situation.
2. Chaque jeton blanc rapport 2 euros et chaque jeton nopir fait perdre 1 euro. On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme algébrique obtenue à la fin des deux tirages.
   (a) Décrire l'événement $\{X=1\}$ et calculer sa probabilité.
   (b) Décrire l'événement $\{X<4\}$ et calculer sa probabilité.

Exercice 11:
Un sondage effectué auprès de vacanciers révèle que 75% d'entre eux pratiquent la natation pendant leurs congés. On interroge succssivement et de façon indépendante quatre vacanciers pris au hasard. Le nombre de vacanciers est suffisamment grand pour que le choix des personnes soit assimilé à un tirage avec remise.

1. Construire un arbre de probabilités illustrant la situation.
2. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de vacanciers pratiquant la natation. Calculer les probabilités suivantes :

(a) $\mathbb{P}(X=4)$	(b) $\mathbb{P}(X=0)$	(c) $\mathbb{P}(x=2)$	(d) $\mathbb{P}(X<4)$

Exercice 12:
Un domino est composé de deux cases portant chacune un nombre de points compris entre 0 et 6. Un même nombre peut figurer dans les deux cases. Un jeu de dominos en comporte 28. On pioche un domino au hasard et on considère la variable aléatoire X égale à la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur du domino.

1. Préciser les valeurs prises par X
2. Décrire l'événement $\{X=3\}$ et calculer sa probabilité.
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 13:
Un joueur doit miser 5 euros pour avoir le droit de tirer une boule d'une urne qui en contient dix : 3 rouges, 5 vertes et les autres sont bleues. Si le joueur tire une boule rouge, il perd sa mise. S'il tire une boule bleue, sa mise lui est rendue. S'il tire une boule verte, on lui donne 8 euros. On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur (ce gain est négatif si le joueur perd de l'argent).

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 14:
On lance une pièce de monnaie truquée de telle manière que la probabilité de sortie de la face "pile" est $0,4$. Le joueur gagne 3 euros si le face visible est "pile", sinon il perd 2 euros. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur.

1. Etablir la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Le jeu est-il équitable ? Justifier.

Exercice 15:
Pour le premier match de l'équipe de France de football à l'Euro 2016, l'UEFA avait émis l'idée de mettre tous les billets du stade au même tarif de 30 euros.

De plus, sur chaque billet aurait été inscrite un chiffre aléatoire entre 0 et 9 :

- Si le billet comportait le chiffre 0, alors la place aurait été intégralement remboursée ;
- Si le numéro avait été impair, alors la place aurait été à demi-tarif ;
- Sinon, le spectateur n'aurait pas été remboursé.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque billet, associe le prix que le spectateur aurait payé.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.
3. Quelle aurait été la recette pour ce premier match si 78500 places payantes avaient été toutes vendues.

Exercice 16:
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque partie d'un jeu, associe le gain du joueur (positif si celui-ci gagne de l'argent, négatif sinon). Elle prend les valeurs -5, 3 et a. On a :

$$\mathbb{P}(X=-5)=0,6 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=a)=0,1$$

1. Calculer la valeur de $\mathbb{P}(X=3)$.
2. Exprimer l'espérance de X en fonction de a.
3. Exprimer l'écart-type en fonction de a.
4. Déterminer la valeur de a à partir de laquelle le jeu est favorable au joueur.

Exercice 17:
On propose à Fatima de tirer une carte dans un jeu de 52 cartes :

- Si elle obtient un As, elle gagne 3 euros ;
- Si elle obtient une figure, elle gagne 2 euros.
- Dans les autres cas, elle perd 1 euros.

Le jeu est-il équitable ?

Exercice 18:
Chantal trie des chemisiers: dans un carton, 8 sont encore à la mode mais 17 ne le sont plus. Elle prend un chemisier au hasard. Montrer que cette situation aléatoire peut être modéliser par une loi de Bernoulli que l'on caractérisera.

Exercice 19:
Gullaume trie des documentaires : il sait qu'il en 360 sur la guerre de 14-18 et 1640 sur la guerre de 39-45. Il prend un documentaire au hasard. Montrer que cette situation aléatoire peut être modéliser par une loi de Bernoulli que l'on caractérisera.

Exercice 20:
A un jeu télévisé, un candidat doit tirer succssivement et avec remise deux boules d'une urne qui en contient dix : une marquée 500 euros, trois marquées 100 euros et les autres marquées 0 euro. Le candidat gagne le total des deux sommes d'argent tirées.

1. Construire un arbre représentant la situation.
2. On note X la variable aléatoire qui associe, à chaque partie, la somme d'argent gagnée par le candidat. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

Exercice 21:
Lors d'une séance de cinéma, on distribue au hasard un billet de loterie aux 250 spectateurs.
Parmi les 250 billets distribués, 5 donnent droit à quatre places gratuites, 15 donnent droit à trois places gratuites, 60 donnent droit à une place gratuite et avec les autres billets on ne gagne rien.

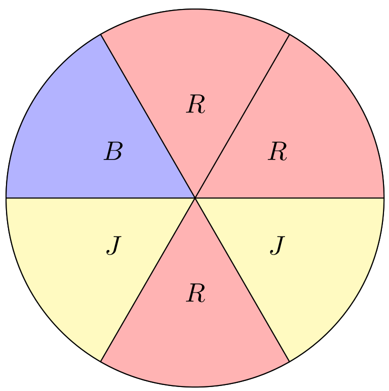
1. On considère un spectateur qui a reçu un billet. Déterminer la probabilité des événements :
   (a) A : "Le spectateur ne gagne rien"
   (b) B : "Le spectateur gagne au moins deux places gratuites"
2. On note X la variable aléatoire désignant le nombre de places gratuites gagnées avec un billet.
   (a) Déterminer, sous forme de tableau, la loi de probabilité de X
   (b) Calculer la probabilité de l'événement $(X \leq 2)$
   (c) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$
   (d) Combien faudrait-il de billets faisant gagner une place gratuite pour que $\mathbb{E}(X)=1$?

Exercice 22:

1. Une roue de loterie comporte 3 secteurs, portant respectivement les numéros 1,2 et 3. Quand on fait tourner la roue, un repère indique le numéro sortant. La probabilité de sortie du numéro 2 est double de la probabilité de sortie du numéro 1, et la probabilité de sortie du numéro 3 est triple de celle du numéro 1. Calculer les probabilités de sortie respectives des 3 numéros.

2. La roue est maintenant divisée en 6 secteurs égaux ayant chacun la même probabilité de s'arrêter devant le repère.
2 secteurs sont jaunes (marqués J sur la figure);
3 secteurs sont rouges (marqués R sur la figure);
1 secteur est bleu (marqué B sur la figure);

La règle du jeu est la suivante: Pour participer au jeu, le joueur doit miser une certaine somme et si le jaune sort, il gagne 20 euros, si le bleu sort, il gagne 30 euros et si le rouge sort, il ne gagne rien.



(a) Dans cette question, on suppose que la mise est de 10 euros. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque arrêt de la roue associe le gain effectif (positif ou négatif) du joueur. (Par exemple, si le bleu sort, le gain effectif pour le joueur est de 20 euros).

i. Donner la loi de probabilité de la variable X

ii. Calculer son espérance

(b) L'organisateur du jeu ne souhaite pas que l'espérance de gain du joueur soit positive. A quelle valeur linimale, exprimée par un nombre entier d'euros, doit-il fixer le montant de la mise ?

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 23:
Une urne contient vingt boules indiscernables au toucher : huit boules cyan et trois fois plus de boules magenta que de boules jaunes.

1. On prélève une boule dans cette urne. Déterminer le modèle de probabilité associé à cette expérience.

2. On prélève deux boules, avec remise, dans cette urne. Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.

3. Un jeu fonctionne selon les règles suivantes :

   - Si les deux boules tirées ont la même couleur, le joueur remport 10 euros.
   - Si l'une des deux boules est de couleur jaune, le joueur gagne 2 euros.
   - Dans les autres cas, le joueur perd 5 euros.

   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G associé au gain du joueur. Le jeu est-il équitable ?

4. Rédiger une fonction Python simulant la variable aléatoire G.

1.4 Approfondissements

Exercice 24:
X est une variable aléatoire de loi de probabilité :

x_i	x_1	...	x_r
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	...	p_r

On pose $\phi(x) = p_1(x - x_1)^2 + ... + p_r(x - x_r)^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Prouver que $\dfrac{d}{dx}(x - x_i)^2 = 2(x - x_i)^2$.

2. Prouver que $\phi'(x) = 2x - 2\mathbb{E}(X)$.

3. En déduire pour quelle valeur la fonction ϕ est minimale et reconnaître son minimum.