1 Fonction exponentielle

1.1 Compétences Attendues

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
- Pour une valeur numérique strictement positive de k, représenter graphiquement les fonctions $t \mapsto e^{\pm kt}$.
- Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle (par exemple évolution d'un capital à taux fixe, décroissance radioactive).

1.2 Exercices

Exercice 1:
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sqrt{\dfrac{e \times e^{-5}}{e^2}}$
2. $\dfrac{e^{1,4} \times e^{-1}}{e^{1,2}}$
3. $\sqrt{\dfrac{e \times e^2}{e^{-7}}}$
4. $e^{1,5} \times \left(e^{-0,5}\right)^5$

Exercice 2:
Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{e^{x^2} \times (e^x)^2}{e^{(x+1)^2}}$
2. $\dfrac{e^{3+x}}{e^{3-x}}$
3. $\dfrac{e^{2x+4} \times e^{-x+1}}{e^{x+5}}$

Exercice 3:
Simplifier les expressions suivantes.

1. $A = e^4 \times e^7 \times e^{-2}$
2. $B = \dfrac{e^{3x} + e^x}{e^x}$
3. $C = e \times \left(e^2\right)^3$
4. $D = \dfrac{e^{3x} \times e^x}{2e^{2x}}$

Exercice 4:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{-7x} \times e^{2x+8} = e^{-x+3}$
2. $\dfrac{e^{3x-1}}{e^{-5x+4}} = 1$
3. $\left(e^{3x}\right)^2 \times e^{x^2+5} = 1$
4. $e^{1-x} - e^{2x^2} = 0$

Exercice 5:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x(e^x - 1) = 0$
2. $(e^x + 8)(e^x - e) = 0$
3. $xe^{2x+1} = x$
4. $(e^{-3x+6} - e)(e^{x^2} - 1) = 0$

Exercice 6:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{x^2+6x+5} \geq 1$
2. $e^{-x^2-3x+5} > e$
3. $e^{2x^2-3x-1} \leq \left(e^4\right)^2$
4. $\dfrac{e^{x^2} \times \left(e^{-5}\right)^3}{\left(e^x\right)^2} \leq 1$

Exercice 7:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1. $x^2 + (1-e)x - e = 0$
2. $e^{2x} + e^{x-2} = 0$

Exercice 8:
On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - \dfrac{1}{x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1. Déterminer une expression de la dérivée de f.
2. Donner le tableau de signes de cette dérivée.
3. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 9:
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x+1}$ définie et dérivable sur $]-1; +\infty[$.

1. Donner le tableau de signes de f.
2. Dresser le tableau de variations de f après avoir calculé sa dérivée.

Exercice 10:
On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - x + 1$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Etablir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11:
On considère la fonction $g : x \mapsto x^2e^x$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Etablir le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12:
On considère les fonctions $f : x \mapsto e^{2x-5}$ et $g : x \mapsto e^{-2x+3}$.

1. Etablir les tableaux de variations des fonctions f et g.
2. Résoudre pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) > f(x)$.

Exercice 13:
On considère la fonction $f : x \mapsto (-x^2 + 3x - 1)e^{-x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Etablir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14:
On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^{12x+5}}{x^3}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g'(x) = \dfrac{(12x-3)e^{12x+5}}{x^4}$.
2. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 15:

1. On considère la fonction $g : x \mapsto (x-2)e^{-2x+6} + 3$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Etablire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
2. Le bénéfice (en millions d'euros) d'une grande entreprise en fonction de la quantité x (en tonnes) de métal vendue est donné par la fonction g.
   (a) Quelle quantité minimale doit vendre l'entreprise pour réaliser un bénéfice ?
   (b) Quel est le bénéfice maximal ? Pour quelle quantité de métal vendu ?

Exercice 16:
Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1000°C. A la fin de la cuisson, il est atteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius (°C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70°C ; sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

On note t le temps (en h) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint. La température du four (en °C) à l'instant t est donnée par la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f : x \mapsto ae^{-\frac{t}{5}} + b \quad \text{où} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

On admet que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $f'(t) + \dfrac{1}{5}f(t) = 4$.

1. Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement la température du four est de 1000°C.
2. Au bout de combien d'heures peut-on ouvrir la porte du four en toute sécurité ?

Exercice 17:
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2+x}{e^x}$, définie sur $\mathbb{R}$, est la dérivée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{e^x}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de a et de b.

Exercice 18:
On appelle :

- Fonction cosinus hyperbolique la fonction notée cosh définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\cosh : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
- Fonction sinus hyperbolique la fonction notée sinh définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\sinh : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Montrer que la fonction cosinus hyperbolique est paire et que la fonction sinus hyperbolique est impaire.
2. Montrer que, pour tout réel x: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
3. (a) Montrer que, pour tout réel x, $\sinh'(x) = \cosh(x)$.
   (b) Montrer que la fonction sinh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et calculer $\sinh(0)$.
   (c) En déduire le tableau de signe de sinh.
4. (a) Montrer que, pour tout réel x, $\cosh'(x) = \sinh(x)$.
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction cosh.
   (c) Quel est le minimum atteint par la fonction cosh sur $\mathbb{R}$

Exercice 19:
On définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - 1}$. Etablir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 20:
Une entreprise fabrique chaque jour x tonne d'un produit. Le coût total mensuel, en milliers d'euros, pour produire x tonnes du produit est modélisé par la fonction :

$$C : x \mapsto (2x-9)e^{1-0,5x}$$

1. Le coût marginal, qui correspond au supplément de coput total pour la production d'une tonne supplémentaire, est égal à la dérivée du coût total.

   (a) Montrer que le coût marginal est donné par la fonction :

   $$C_m : x \mapsto (6,5 - x)e^{1-0,5x}$$

   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction C sur $[0;10]$.

   (c) Pour combien de tonnes produites quotidiennement le coût total mensuel est-il maximum ? Quel est ce coût maximum, arrondi au milliers d'euros ?

2. Le coût moyen est donné par la fonction $f : x \mapsto \dfrac{C(x)}{x}$.

   (a) Vérifier que la fonction f est dérivable sur $]0;10]$ et que pour tout x dans l'intervalle $]0;10]$

   $$f'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x^2 + 9x + 18}{x^2} \times e^{1-0,5x}$$

   (b) Après avoir cherché les solutions $x \in [0;10]$ de l'équation $-2x^2+9x+18 = 0$, donner le tableau de variations de f sur $[0;10]$

   (c) En déduire le coût moyen maximum de production.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 21:

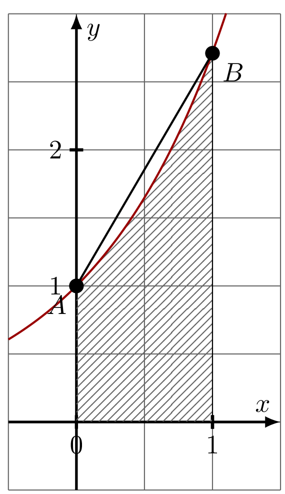
Mona et Erwan veulent déterminer l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle délimitée par les droites d'équation $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ et $y = e^x$.

1. Mona estime que l'aire $\mathcal{A}$ cherchée est proche de celle du trapèze $ABCO$ avec:

   - $O(0;0)$
   - $C(1;0)$
   - $A(0;1)$
   - $B(1,e)$

   (a) Quelle est la hauteur du trapèze ? Quelle est la longueur de sa grande base ? de sa petite base ?

   (b) En déduire l'aire du trapèze $ABCO$.

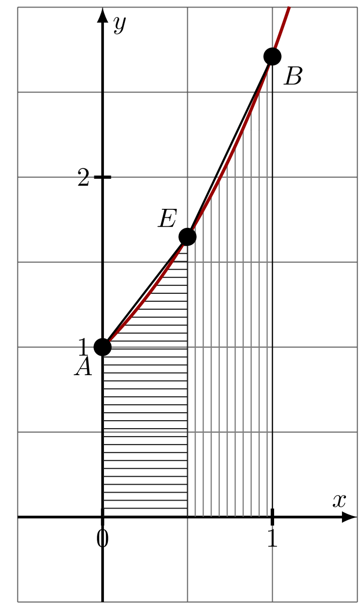


2. Erwan pense que l'idée de Mona est bonne mais qu'ils peuvent être plus précis dans leurs calculs.
   Pour cela, il considère le point E d'abscisse $0,5$ appartenant à la courbe de la fonction exponentielle et il calcule l'aire des deux trapèzes obtenus.
   Il trouve :

   $$\mathcal{A} = \left(\frac{1+\sqrt{e}}{2}\right)^2$$

   (a) Déterminer l'aire du trapèze $AEDO$ et l'aire du trapèze $EBCD$.

   (b) Retrouver le résultat d'Erwan.

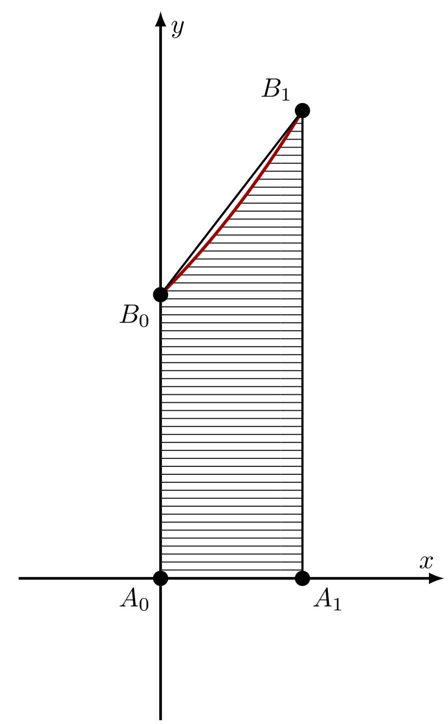


3. Mona surenchérit en expliquant qu'ils peuvent découper l'intervalle $[0;1]$ en $n \in \mathbb{N}^*$ parties égales et obtenir ainsi n trapèzes de hauteurs $\dfrac{1}{n}$.

   (a) On considère les points :

   - $A_0(0;0)$
   - $A_1\left(\dfrac{1}{n};0\right)$
   - $B_0(0;e^0)$
   - $B_1\left(\dfrac{1}{n};e^{\frac{1}{n}}\right)$

   Déterminer l'aire du trapèze $A_0A_1B_0B_1$.



(b) Pour tout nombre entier naturel $k \in [0; n-1]$, on considère les points :

- $A_k\left(\frac{k}{n};0\right)$
- $A_{k+1}\left(\frac{k+1}{n};0\right)$
- $B_k\left(\frac{k}{n};e^{\frac{k}{n}}\right)$
- $B_{k+1} = \left(\frac{k+1}{n};e^{\frac{k+1}{n}}\right)$

Déterminer l'aire du trapèze $A_kA_{k+1}B_kB_{k+1}$.

4. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous écrit par Mona pour calculer la somme des aires des n trapèzes.

```
A=....
for k in range(.....):
    A+=np.exp(k/n)/n * (1+np.exp(1/n))/2
print(A)
```

5. Coder cet algorithme en Python puis le tester pour $n = 10$.

1.4 Approfondissements

Exercice 22:

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ est constante sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.
2. En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}, \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.
3. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.