1 Probabilités conditionnelles

1.1 Compétences Attendues

- Construire un arbre de probabilités associé à une situation aléatoire donnée.
- Interpréter les pondérations de chaque branche d'un arbre en termes de probabilités, et notamment de probabilités conditionnelles.
- Faire le lien entre la définition des probabilités conditionnelles et la multiplication des probabilités des branches du chemin correspondant.
- Utiliser un arbre de probabilités pour calculer des probabilités.
- Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

1.2 Exercices

Exercice 1:
On donne deux événements incompatibles A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0,3$ et $\mathbb{P}(B) = 0,5$. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$; $\mathbb{P}(A \cup B)$; $\mathbb{P}(\bar{A})$ et $\mathbb{P}(\bar{B})$

Exercice 2:
On donne deux événements incompatibles A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0,3$ et $\mathbb{P}(B) = 0,5$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,1$. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$; $\mathbb{P}(\bar{A})$ et $\mathbb{P}(\bar{B})$

Exercice 3:
A et B sont deux événements indépendants liés à une expérience aléatoire.

1. $\mathbb{P}(A) = \dfrac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{4}$. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{5}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{8}$. Calculer $\mathbb{P}(B)$.
3. $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{6}$. Calculer $\mathbb{P}_A(B)$.

Exercice 4:
Une étude de l'organisation mondiale du tourisme montre que, pour 1 000 touristes venus en Europe l'année dernière, 14% sont venus en France. Parmi les touristes qui sont venus en France, 25% ont dépensé plus de 900 euros pour leur séjour. Parmi les touristes qui ne sont pas venus en France, 15% ont dépensé plus de 900 euros pour leur séjour.

1. Reproduire le tableau suivant et le compléter.

Nombre de touristes	**Venus en France**	**Non venus en France**	**Total**
Ayant dépensé plus de 900 euros			
Ayant dépensé moins de 900 euros			
Total			1000

2. On choisit au hasard un touriste venu en Europe. Tous les touristes ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants.
   - F : "Le touriste a choisi comme destination la France"
   - A : "Le touriste a dépensé plus de 900 euros popur son séjour"

   (a) Calculer $\mathbb{P}(\bar{F} \cap A)$

   (b) Calculer la probabilité que le touriste ait dépensé plus de 900 euros pour son séjour

Exercice 5:
100 élèves de Première technologique se répartissent de la façon suivante.

	Filles	**Garçons**	**Total**
Pratiquent un sport	30	50	80
Ne pratiquent aucun sport	12	8	20
Total	42	58	100

On rencontre au hasard un des élèves 100 élèves. Tous les élèves ont la même probabilité d'être rencontrés. On considère les événements suivants :

- F : "L'élève rencontré est une fille"
- G : "L'élève rencontré est un garçon"
- S : "L'élève rencontré pratique un sport"

1. Traduire par une phrase chacun des deux événements $F \cap S$ et $G \cap \bar{S}$
2. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(S)$; $\mathbb{P}(F \cap S)$; $\mathbb{P}(\bar{S})$ et $\mathbb{P}(G \cap \bar{S})$
3. Déterminer, à l'aide du tableau, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_S(F)$ et $\mathbb{P}_{\bar{S}}(G)$
4. Calculer la probabilité que, sachant que l'élève est un garçon, il pratique un sport. Arrondier la résultat à 10^{-2}

Exercice 6:
Un sondage est effectué dans une société comprenant 40% de cadres et 60% d'employés. On sait que 20% des cadres et 10% des employés de cette société parlent l'anglais.

1. On considère un groupe de 100 salariés. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant.

	Salariés parlant anglais	**Salariés ne parlant pas anglais**	**Total**
Nombre de cadres			
Nombre d'employés			
Total			100

2. On choisit un salarié au hasard parmi les 100. Tous les employés ont la même probabilité de chacun des événements suivants :
   (a) E : "Le salarié est un employé"
   (b) F : "Le salarié est un cadre sachant parler l'anglais"
   (c) G : "Le salarié est un employé sachant parler l'anglais"
   (d) H : "Le salarié sait parler l'anglais"
3. Calculer $\mathbb{P}_H(E)$. Arrondir à 10^{-3}

Exercice 7:
Une maladie atteint 3% d'une population de 30 000 habitants. On soumet cette population à un test.
Parmi les biens portants, 2% ont un test positif.
Parmi les personnes malades, 49 ont un test négatif.

1. Reproduire puis compléter le tableau suivant:

	Malades	**Bien portants**	**Total**
Test positif			
Test négatif			
Total			30000

2. On choisit au hasard une personne de cette population. On considère les événements T et M suivants :
   - T : "Le test est positif pour la personne choisie"
   - M : "La personne choisie est malade".

   (a) Calculer les probabilités des événements suivants : $\bar{T}$; $T \cap M$ et $\bar{T} \cap M$
   (b) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(\bar{T})$; $\mathbb{P}(T \cap M)$ et $\mathbb{P}(\bar{T} \cap M)$
   (c) Calculer la probabilité que la personne choisie soit malade ou ait un test positif.
   (d) Déterminer, à l'aide du tableau, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_T(M)$ et $\mathbb{P}_M(T)$.
   (e) Calculer la probabilité qu'une personne soit malade sachant qu'elle a eu un test négatif.

Exercice 8:
Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher : trois bleues notées B_1, B_2, B_3 et une verte notée V.

Partie A : Tirages successifs avec remise

On prélève au hasard un boule dont on note la couleur et le numéro et on la remet dans l'urne. On recommence en prélevant une deuxième boule dont on note aussi la couleur et le numéro. Un résultat est un couple dont le premier élément est la boule tirée lors du premier tirage et le second la boule tirée lors du second tirage, par exemple (B_1, B_3). On suppose que tous les couples possibles sont équiprobables.

1. A l'aide d'un arbre, déterminer l'ensemble des résultats possibles de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la probabilité de l'événement E_1: "La première boule tirée est bleue et la deuxième boule tirée est verte".
3. Déterminer la probabilité de l'événement E_2 : "Les deux boules tirées sont de la même couleur".
4. On considère les événements suivants :
   - F_1 : "La première boule tirée est bleue" ;
   - F_2 : "La deuxième boule tirée est bleue".

   (a) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(F_1)$, $\mathbb{P}(F_2)$. En déduire $\mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2)$.
   (b) Définir par une phrase l'événement $F_1 \cap F_2$ puis calculer sa probabilité.
   (c) Les deux événements F_1 et F_2 sont-ils indépendants ?

Partie B : Tirages successifs sans remise

On prélève au hasard une boule puis, sans la remettre dans l'urne, on en prélève une seconde.

1. A l'aide d'un arbre, donner tous les résultats possibles.
2. Déterminer, sous forme de fraction irréductible, la probabilité de l'événement G_1 : "la première boule tirée est bleue et la deuxième boule tirée est verte".
3. Déterminer la probabilité de l'événements G_2 : "les deux boules tirées sont de couleur différente".
4. On considère les événements suivants :
   - H_1 : "La première boule tirée est bleue" ;
   - H_2 : "La deuxième boule tirée est bleue".

   (a) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(H_1)$, $\mathbb{P}(H_2)$. En déduire $\mathbb{P}(H_1) \times \mathbb{P}(H_2)$.

   (b) Définir par une phrase l'événement $H_1 \cap H_2$ puis calculer sa probabilité.

   (c) Les deux événements H_1 et H_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 9:
Une agence de voyage propose deux formules week-end pour se rendre à Londres depuis Paris. Les clients choisissent leur moyen de transport : train ou avion.
De plus, s'ils le souhaitent, ils peuvent compléter leur formule par l'option visites guidées. Une étude a produit les données suivantes :

- 30% des clients optent pour l'avion.
- 23% des clients ont choisi à la fois l'avion et l'option "visites guidées".
- 60% des clients ont choisi la visite guidée parmi ceux qui n'ont pas pris l'avion.

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres.
On considère les événements suivants :

- A : le client a choisi l'avion.
- V : le client a choisi l'option " visites guidées ".

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer $P_A(V)$.
3. Démontrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option " visites guidées " est environ égale à 0,65.
4. Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option " visites guidées ". Arrondir le résultat au centième.
5. On interroge au hasard deux clients de manière aléatoire et indépendante.
   Quelle est la probabilité qu'aucun des deux ne prennent l'option " visites guidées " ?
   On donnera les résultats sous forme de valeurs approchées à 10^{-2} près.

Exercice 10:
Une chaîne de salons de coiffure propose à ses clients qui viennent pour une coupe, deux prestations supplémentaires cumulables :

- Une coloration naturelle à base de plantes appelée "couleur-soin".
- Des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées "effet coup de soleil".

Il apparaît que :

- 48% des clients demandent une "couleur-soin".
- Parmi ceux qui ne veulent pas de "couleur-soin", 20% des clients demandent un "effet coup de soleil".
- Par ailleurs, 35% des clients demandent une "couleur-soin" et un "effet coup de soleil".

On interroge un client au hasard.
On notera C l'événement : " Le client souhaite une " couleur-soin ".
On notera E l'événement : " Le client souhaite un " effet coup de soleil ".

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Donner les valeurs de $P(C)$, $P(C \cap E)$ et $P_{\bar{C}}(E)$.
3. Calculer la probabilité que le client ne souhaite ni une " couleur-soin " , ni un " effet coup de soleil ".
4. Calculer la probabilité qu'un client choisisse l'" effet coup de soleil " sachant qu'il a pris une " couleur-soin ".
5. Montrer que la probabilité de l'événement E est égale à 0,454 (à 10^{-3} près).
6. Les événements C et E sont-ils indépendants ?
   On donnera les résultats sous forme de valeurs approchées à 10^{-3} près.

Exercice 11:
Un club de vacances est constitué de 300 adhérents qui pratiquent chacun une activité et une seule parmi les trois activités suivantes : la natation, l'escalade ou le VTT.

- 35% des adhérents sont des filles.
- 30% des adhérents pratiquent le VTT.

- 10% des adhérents pratiquent l'escalade et parmi eux 60% sont des garçons.
- Il y a deux fois plus de garçons que de filles qui pratiquent le VTT.

1. Reproduire le tableau suivant et le compléter.

	Natation	**Escalade**	**VTT**	**Total**
Fille				
Garçon				
Total				300

2. On choisit un adhérent au hasard. On note :
   - N : "L'adhérent pratique la natation".
   - E : "L'adhérent pratique l'escalade".
   - V : "L'adhérent pratique le VTT".
   - F : "L'adhérent est une fille".

   (a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(V)$.

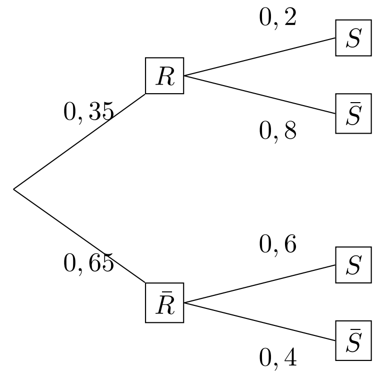
   (b) Calculer la probabilité $\mathbb{P}_F(E)$.

   (c) Déterminer la probabilité que l'adhérent soit un garçon sachant qu'il pratique la natation.

Exercice 12:
Avant de partir en congé, un chapelier étourdi a rangé les 80 chapeaux de sa boutique dans des cartons pour les protéger de la poussière mais en oubliant de les étiqueter. 65% des chapeaux sont en paille (événements noté L) et les trois quarts d'entre eux sont ornés de fleurs ; par ailleurs, la moitié des chapeaux ne comportent pas de fleurs (événement noté $\bar{F}$).

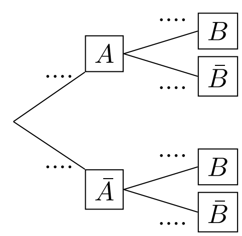
1. Regrouper ces informations dans un tableau d'effectif à double entrée.
2. On ouvre au hasard un carton à chapeau.
   - Quelle est la probabilité que ce chapeau soit orné de fleurs ? Même question sachant qu'il est en paille.
   - Quelle est la probabilité que ce chapeau ne soit pas en paille et ne comporte pas de fleur ?
   - Quelle est la probabilité que ce chapeau soit en paille sachant qu'il est orné de fleurs ?

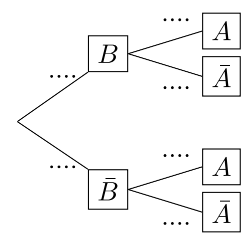
Exercice 13:
Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilités suivant :



1. Calculer $\mathbb{P}(R \cap S)$ et $\mathbb{P}(\bar{R} \cap S)$.
2. Justifier que $\mathbb{P}(S) = 0,46$.
3. Calculer $\mathbb{P}_S(R)$ et $\mathbb{P}_{\bar{S}}(R)$.
4. Les événements S et R sont-ils indépendants ?

Exercice 14:
A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0,4$, $\mathbb{P}_A(B) = 0,6$ et $\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = 0,8$.





1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité de gauche à partir des données de l'énoncé.
2. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$.
3. En déduire $\mathbb{P}(B)$.
4. Calculer $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_{\bar{B}}(A)$.
5. Recopier et compléter l'arbre de probabilité de droite.

Exercice 15:
Dans un jeu de 32 cartes, qui compte 12 figures, on extrait au hasard successivement et sans remise deux fois une carte . On note F_1 l'événement "la première carte extraite est une figure" et F_2 l'événement "la seconde carte extraite est une figure".

1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
2. Déterminer la probabilité que les deux cartes extraites soient des figures.

3. Justifier que la probabilité que la deuxième carte extraite soit une figure est égale à $0,375$.
4. En déduire la probabilité que la première carte extraite soit une figure, sachant que la seconde est une figure.

Exercice 16:
En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 48% affirment vouloir voter pour le candidat A, les autres pour le candidat B. Compte tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10% des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent pour le candidat B, tandis que 20% des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.
On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note A l'événement "la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A", B l'événement "la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B" et V l'événement "la personne interrogée dit la vérité".

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. (a) Déterminer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
   (b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, déterminer la probabilité qu'elle affirme vouloir pour le candidat A.
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote pour le candidat A est $0,536$.

Exercice 17:
Un jardinier dispose d'un lot de bulbes de tulipes : 40% sont à fleur rouge, 30% à fleur jaune et le reste est à fleur blanche. D'autre part, 85% des bulbes à fleur rouge, 90% des bulbes à fleur jaune et 80% des bulbes à fleur blanche donnent une fleur une fois plantées.
On choisit un bulbe au hasard dans ce lot. On note R l'événement "le bulbe est à fleur rouge", J l'événement "le bulbe est à fleur jaune" et F l'événement "le bulbe fleurit".

1. (a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
   (b) Justifier que la probabilité que le bulbe fleurisse une fois planté est égale à $0,85$.
2. (a) Sans calcul, justifier que les événements R et F sont indépendants.
   (b) Les événements J et R sont-ils indépendants ?

Exercice 18:
Une agence de voyage propose deux durées de séjours - le week-end ou la semaine - et deux types de destinations - France ou étranger.

Parmi les dossiers de l'agence reçus la première semaine de mars, on constate que :

- 60% des séjours ont lieu en France ;
- 45% des séjours en France durent une semaine ;
- 75% des séjours à l'étranger durent une semaine.

On pélève un dossier au hasard parmi les dossiers reçus la première semaine de mars et on note :

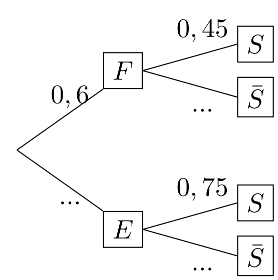
- F l'événement : "Le séjour a lieu en France" ;
- S l'événement : "Le séjour dure une semaine" ;
- E l'événement contraire de F.

1. La première semaine de mars, l'agence a reçu 100 dossiers.
   (a) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant :

	Nb de week-ends	**Nb de séjours d'une semaine**	**Total**
Nb de séjours en France			
Nb de séjours à l'étranger			
Total			100

   (b) Trouver les probabilités des événements F, S sachant F et S sachant E.
   (c) Quelle est la probabilité qu'un séjour dure une semaine et ait lieu en France?
   (d) Montrer que la probabilité qu'un séjour dure une semaine est $0,57$.
   (e) En déduire la probabilité que, sachant qu'il dure une semaine, un séjour ait lieu en France.

2. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



   (b) En utilisant les données de l'énoncé, trouver les probabilités $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}_F(S)$ et $\mathbb{P}_E(S)$.
   (c) Quelle est la probabilité qu'un séjour dure une semaine et ait lieu en France ?
   (d) Démontrer que $\mathbb{P}(S) = 0,57$.
   (e) Calculer la probabilité que, sachant qu'il dure une semaine, un séjour ait lieu en France.

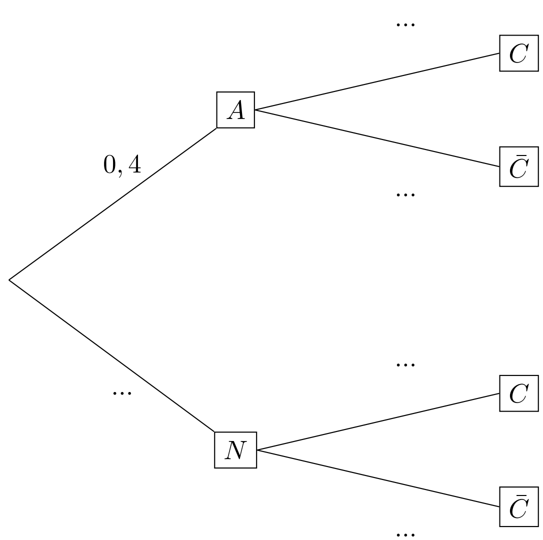
Exercice 19:
Pour pouvoir être commercialisées, les tablettes de chocolat doivent subir un contrôle de leur masse.
Afin d'améliorer la proportion de tablettes de chocolat commerciabilisables, le fabricant met en place une nouvelle chaîne de production.
L'ancienne chaîne ne prend désormais en charge que 40% de la production totale.
A l'issue de la fabrication, un nouveau contrôle de masse est effectué.

- Parmi les tablettes produits par l'ancienne chaîne, 68% sont commercialisables.
- Parmi les tablettes produits par la nouvelle chaîne, 90% sont commercialisables.

On choisit, de façon aléatoire, une tablette dans l'ensemble de la production. On note:

- A l'événement "la tablette choisie est produite par l'ancienne chaîne".
- N l'événement "la tablette choisie est produite par la nouvelle chaîne".
- C l'événement "la tablette choisie est commercialisable".

1. Compléter, après l'avoir reproduit, l'arbre de probabilités ci-dessous :



2. Calculer la probabilité que la tablette choisie provienne de l'ancienne chaîne et soit commercialisable.
3. Peut-on affirmer qu'au moins 80% de la production totale de tablettes est commercialisables ? Expliciter la démarche utilisée.

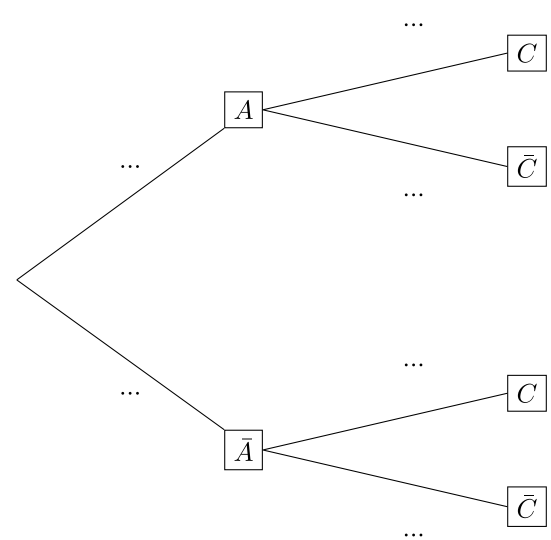
Exercice 20:
Le cuisinier d'un centre de vacances a confectionné des beignets pour le goûter des enfants :

- 30% des beignets sont à l'ananas, les autres sont aux pommes ;
- 35% des beignets à l'ananas sont aromatisés à la cannelle, ainsi que 45% des beignets aux pommes.

On choisit un beignet au hasard. On admet que chaque beignet a la même probabilité d'être choisi. On définit les événements suivants :

- A : "le beignet choisi est à l'ananas".
- C : "le beignet choisi est aromatisé à la cannelle".

1. Donner la probabilité de $\mathbb{P}_A(C)$ à partir des données de l'énoncé.
2. Reproduire et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



3. Définir par une phrase l'événement $A \cap C$ puis calculer sa probabilité.
4. Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à $0,42$.
5. Calculer la probabilité que le beignet soit à l'ananas, sachant qu'il est aromatisé à la cannelle.