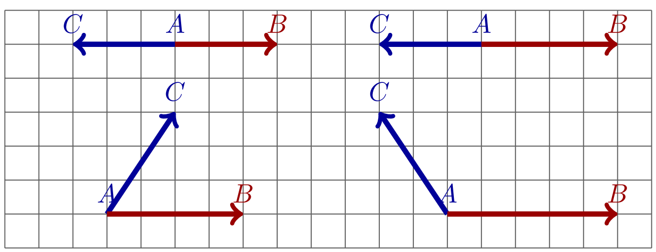
1 Calcul vectoriel & Produit scalaire

1.1 Compétences Attendues

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace.
- En vue de la résolution d'un problème, calculer le produit scalaire de deux vecteurs en choisissant une méthode adaptée (en utilisant la projection orthogonale, à l'aide des coordonnées, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide de normes).
- Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème géométrique.

1.2 Exercices

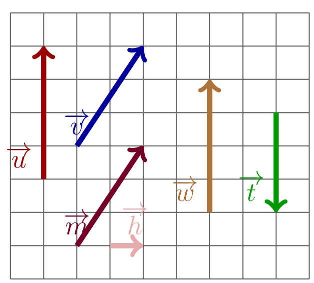
Exercice 1:
Calculer $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ dans chaque cas. Les carrés du quadrillage sont de côté 1.



Exercice 2:

Calculer les valeurs des produits scalaires suivants. Les carrés du quadrillage sont de côté 1.

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$
2. $\langle \vec{t}, \vec{w} \rangle$
3. $\langle \vec{m}, \vec{h} \rangle$
4. $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$
5. $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
6. $\langle \vec{m}, \vec{u} \rangle$



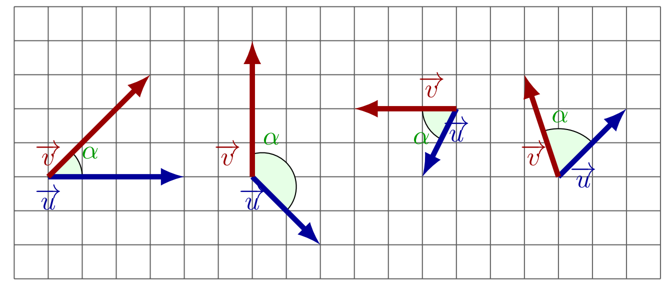
Exercice 3:

1. Pour chaque figure ci-dessous, calculer :

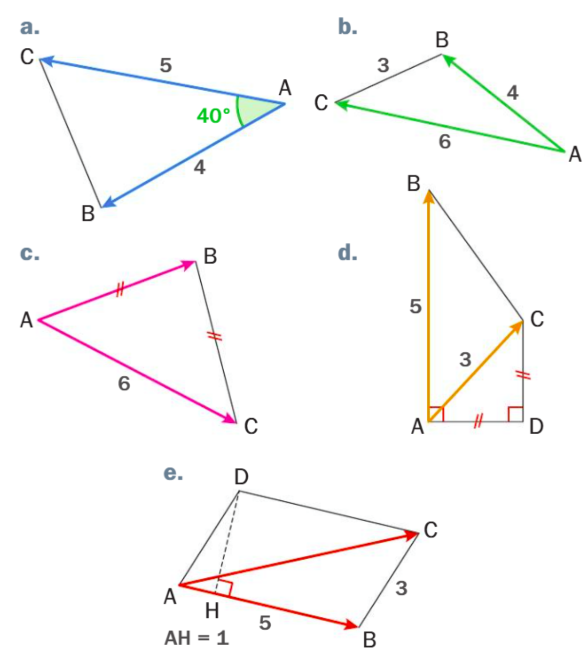
   (a) $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$

   (b) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

2. En déduire la valeur de l'angle géométrique α.



Exercice 4:
Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ en choisissant une méthode adaptée.



Exercice 5:
Soit ABC un triangle.

1. Déterminer, si possible, la longueur AC.

   (a) $AB = 3$, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = -6$, $\widehat{BAC} = 60°$.

(b) $AB = 5$, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = -10$, $\widehat{BAC} = 135°$.

2. Déterminer, si possible, une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

   (a) $AB = 2$, $AC = \sqrt{2}$, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = -2$.

   (b) $AB = 5$, $AC = 2$, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 15$.

   (c) $AB = 3$, $AC = 4$, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 12$.

Exercice 5:
Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$
2. $\langle \overrightarrow{u}, -4\overrightarrow{v} \rangle$
3. $\langle -\overrightarrow{u}, 2\overrightarrow{v} \rangle$
4. $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \rangle$

Exercice 6:
$ABCD$ est un rectangle de longueur $AB = 6$ et de largeur $AC = 4$. E est un point du segment $[AB]$ défini par $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. F est le projeté orthogonal du point B sur la droite (ED).

1. En calculant le produit scalaire $\langle \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED} \rangle$ de deux façons différentes, calculer l'angle $\widehat{DEC}$.

2. En calculant le produit scalaire $\langle \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DE} \rangle$ de deux façons différentes, calculer la longueur BF.

Exercice 7:
Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ et déterminer la (ou les) valeur(s) éventuelle(s) de m telle(s) que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux.

1. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 5-m \\ m \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} m-2 \\ m \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3-m \\ m \end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -m \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} m \\ 4 \end{pmatrix}$
4. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ m \end{pmatrix}$

Exercice 8:
Soient A, B et C trois points du plan.

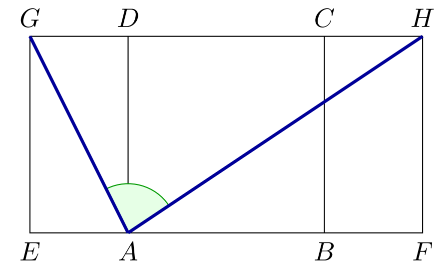
1. Dans chaque casn indiquer si le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est orthonormé.

   (a) $A(5; -6)$, $B(4,4; -5,2)$ et $C(4,4; -6,8)$

   (b) $A(1; 2)$, $B(2; 2,5)$ et $C(0,5; 1)$

2. Montrer que le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ avec $A(2; -7)$, $B(1; -5)$ et $C(0,5; 1)$ n'est pas orthonormé.

Exercice 9:
$ABCD$ est un carré de côté 4. $ABCD$ et $BFHC$ sont deux rectangles de largeur 2. Etudier la perpendicularité des droites (AG) et (AH) en calculant le produit scalaire $\langle \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AH} \rangle$.



Exercice 10:
Soient $A(6; 1)$ et $B(-3; 3)$ deux points du plan et $\mathcal{D}$ une droite d'équation $y = 2x$ où $x, y \in \mathbb{R}$.
On cherche à déterminer s'il existe des points M appartenant à la droite $\mathcal{D}$ tels que les droites (AM) et (BM) soient perpendiculaires. On note $M(x; y)$.

1. Si $M \in \mathcal{D}$, établir une relation entre x et y.

2. Exprimer en fonction de x les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.

3. Calculer $\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle$ en fonction de x puis conclure.

Exercice 11:
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $ABCD$ un carré de côté a. E est un point du segement $[AB]$ et F le point du segment $[AD]$ tel que $AE = DF$. On pose $AE = x$.

1. Exprimer en fonction de a et de x les produits scalaires $\langle \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EA} \rangle$ et $\langle \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{AD} \rangle$.

2. Démontrer que les droites (CF) et (ED) sont perpendiculaires.

Exercice 12:
Soient $R(-2; 3)$, $S(4; 5)$ et $T(3; -2)$ sont trois points du plan. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point T sur la droite (RS), c'est-à-dire le point $U \in (RS)$ tel que $(TU) \perp (RS)$.

Exercice 13:

1. Dans un tiangle ABC, $AB = 6$, $AC = 15$ et $BC = 10$. Calculer une valeur approchée de la mesure de chaque angle.

2. Dans un triangle DEF, $DE = 10$, $DF = 7$ et $\widehat{D} = 60°$.

3. Sachant que $IJ = 32$, $IK = 20$ et que $\widehat{JIK} = 30°$, calculer la longueur JK.

4. Estimer l'angle $\widehat{GHL}$, sachant que $GH = 22$, $HL = 21$ et $GL = 25$.

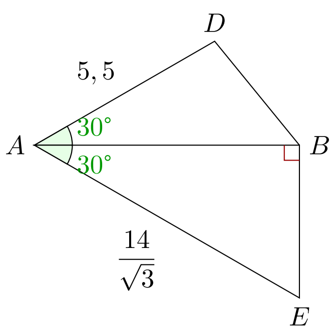
Exercice 14:
Le triangle MNP est défini par $MN = 9$, $MP = 5$ et $NP = 7,5$. On note M', N' et P' les milieux respectifs des segments $[NP]$, $[MP]$ et $[MN]$. Calculer la longueur de chaque médiane.

Exercice 15:
On donne $AB = 5$, $BC = 3$ et $\widehat{B} = 60°$.

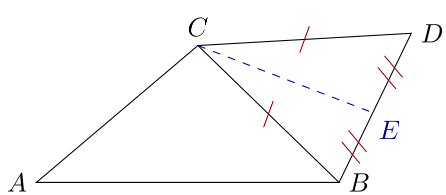
1. Calculer la longueur AC.

2. En déduire $\widehat{A}$ puis $\widehat{C}$.

Exercice 16:
Déterminer la longueur du chemin $E - B - D$.



Exercice 17:
Le triangle ABC est tel que $AC = 7$, $AB = 10$ et $BC = 6,5$.



1. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

2. Sachant que $\widehat{BCD} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$, déterminer une valeur approchée de CE, où E est le milieu du segment $[BD]$.

Exercice 18:
Le segment $[GH]$ est de longueur 10.

1. Justifier que l'ensemble des points M tels que $\langle \overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MH} \rangle = 5$ est un cercle.

2. En déduire la nature de l'ensemble des points M tels que $\langle \overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MH} \rangle \leq 5$.

Exercice 19:
Le segment $[EF]$ est de longueur $3cm$. Le point P appartient à la demi-droite $[FE)$ et est tel que $EP = 7$. Déterminer la valeur du réel k tel que l'égalité $\langle \overrightarrow{EP}, \overrightarrow{EF} \rangle = k$ soit vérifiée.

Exercice 20:
Soient deux points C et D tels que $CD = 6$, on note :

- $\mathcal{D}_1$ l'ensemble des points P tels que $\langle \overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CD} \rangle = 12$.
- $\mathcal{D}_2$ l'ensemble des points Q tels que $\langle \overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CD} \rangle = 3$.
- $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M tels que $3 \leq \langle \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD} \rangle \leq 12$.

1. Déterminer les ensembles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

2. En déduire la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$.

3. Représenter l'ensemble $\mathcal{C}$.

Exercice 21:
Soit $[GH]$ un segment de longueur 10.

1. On note $\mathcal{C}$ des points M tels que :

$$GM^2 + HM^2 = 56$$

   (a) On note I le milieu du segment $[GH]$. En utilisant une formule de la médiane, démontrer que $M \in \mathcal{C} \iff MI = \sqrt{3}$.

   (b) Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$.

2. Soit $k \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}_k$ l'ensemble des points M tels que

$$GM^2 + HM^2 = k$$

   Déterminer l'ensemble des valeurs de k telles que $\mathcal{C}_k$ soit l'ensemble vide.

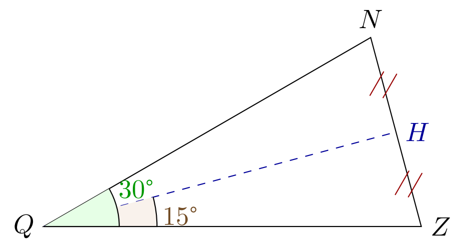
Exercice 22:
A et B sont deux points du plan tels que $AB = 1$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M tels que $\dfrac{MA}{MB} = 3$.

1. Montrer que $M \in \mathcal{F} \iff MA^2 - 9MB^2 = 0$.
2. On définit les points P et Q tels que :
$$\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{0}$$
et
$$\overrightarrow{AQ} - 3\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{0}$$
Construire les points P et Q.
3. Justifier que $P, Q \in \mathcal{F}$.
4. Exprimer $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MQ}$.
5. En déduire que $M \in \mathcal{F} \iff \langle \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ} \rangle = 0$.
6. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathcal{F}$ puis construire cet ensemble.

Exercice 23:
Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 5$. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M tels que :
$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = MA$$

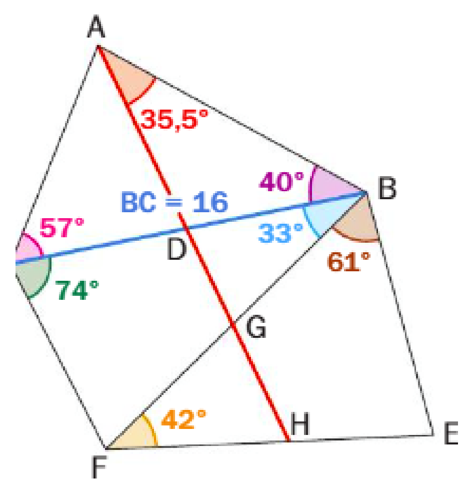
1. On note I le milieu du segment $[AB]$. Exprimer $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$ en fonction de MI.
2. En déduire que $M \in \mathcal{F} \iff MA^2 - 4MI^2 = 0$.
3. On définit les points C et D tels que :
$$\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$
et
$$\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0}$$
Justifier que $C, D \in \mathcal{F}$.
4. Exprimer $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI}$ en fonction de $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MI}$ en fonction de $\overrightarrow{MD}$.
5. En déduire que $M \in \mathcal{F} \iff \langle \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD} \rangle = 0$.
6. Conclure quant à la nature de l'ensemble $\mathcal{F}$ puis construire cet ensemble.

Exercice 24:
Le triangle QNZ est isocèle en Q avec $QN = 1$ et $\widehat{Q} = 30°$.



1. Calculer la longueur NZ.
2. On note H le pied de la hauteur issue de Q.
   (a) Justifier que H est le milieu du segment $[NZ]$ et que $\widehat{ZQH} = 15°$.
   (b) En déduire $\sin(15°)$.
   (c) Calculer la longueur HQ. En déduire $\cos(15))$.

Exercice 25:
Afin d'estimer la longueur AG, on part d'une mesure connue ($BC = 16km$) et on construit une chaîne de triangles dont les angles sont de mesures connues. Estimer la longueur AG.



1.3 Algorithmes et Python

Exercice 26:

1. Ecrire un programme Python qui prend en argument les coordonnées d'un vecteur et qui calcule le carré de la norme de ce vecteur.

2. Soient $\overrightarrow{u} = \binom{a}{b}$ et $\overrightarrow{v} = \binom{c}{d}$ deux vecteurs du plan. Recopier et compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle renvoie le produit scalaire $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.

```
def produiscalaire(a,b,c,d):
    u=a**2+b**2
    v=c**2+d**2
    z=....
    w=0.5*(....-....-....)
    return w
```

Exercice 27:
Ecrire une fonction Python qui prend en argument les coordonnées de deux vecteurs et qui vérifie s'ils sont orthogonaux.

1.4 Approfondissements

Exercice 28:
Dans un triangle ABC, on note H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs respectivement issues de A, B et C.
On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

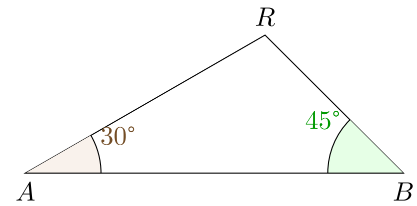
1. Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC de trois manières différentes à l'aide des trois hauteurs.

2. Déterminer $\sin(\hat{A}), \sin(\hat{B})$ et $\sin(\hat{C})$ en fonction de a, b et c.

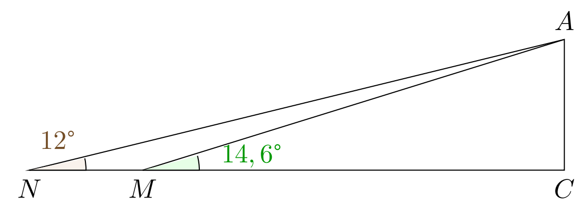
3. En déduire la loi des sinus :

$$\frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c} = \frac{2\mathcal{A}}{abc}$$

Exercice 29:
Afin de repérer un rocher placé en R, un marin mesure depuis les points A et B, espacés de 5 milles marins (1 mille marin = 1852 mètres), deux angles : $\widehat{RAB}$ et $\widehat{ABR}$. Déterminer les longueurs AR et BR.



Exercice 30:
Afin d'estimer la hauteur (antenne comprise) d'une des tours de la Cité administrative de Bordeaux (représentée par le segement $[AC]$), Lina fait deux relevés d'angle depuis la rue Georges Mandel. Elle a parcouru 100 mètres entre les deux relevés, marqués par les points M et N. C'est-à-dire que $MN = 100$.



1. Estimer la hauteur de la Cité administrative.

2. A quelle distance se trouvait Lina de la Cité au moment du premier relevé ?