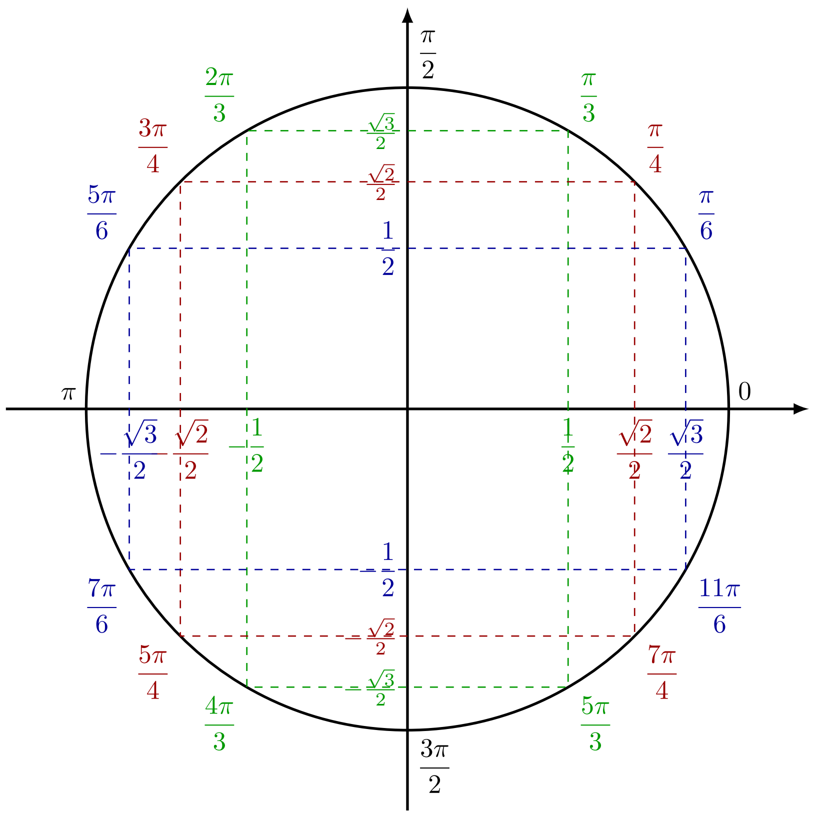
1 Fonctions trigonométriques

1.1 Compétences Attendues

- Placer un point sur le cercle trigonométrique.
- Lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique.
- Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques.
- Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de x, les cosinus et sinus d'angles associés à x.

1.2 Exercices

On donne le cercle trigonométrique avec les valeurs remarquables de cosinus et sinus ci-dessous :



Exercice 1:
Convertir les mesures des angles suivants en degrés :

1. $\frac{\pi}{12}$ rad
2. $\frac{\pi}{5}$ rad
3. $\frac{2\pi}{7}$ rad

Exercice 2:
Convertir les mesures des angles suivants en degrés (arrondir à l'unité près) :

1. $0,314$ rad
2. $1,75$ rad
3. $7,35$ rad

Exercice 3:
Convertir les mesures des angles suivants en radians :

1. $120°$
2. $15°$
3. $72°$

Exercice 4:
Convertir les mesures des angles suivants en radians :

1. $95°$
2. $135°$
3. $275°$

Exercice 5:
Parmi les mesures suivantes, lesquelles sont des mesures principales ?

1. 0
2. $\frac{7\pi}{6}$
3. $-\frac{9\pi}{4}$
4. $\frac{\pi}{5}$
5. $-\frac{32\pi}{33}$

Exercice 6:
Parmi les mesures suivantes, lesquelles sont des mesures principales ?

1. $-\pi$
2. $\frac{7\pi}{6}$
3. $-\frac{3\pi}{2}$
4. $-\frac{5\pi}{6}$
5. $\frac{7\pi}{3}$

Exercice 7:
Déterminer la mesure principale des angles dont une mesure est :

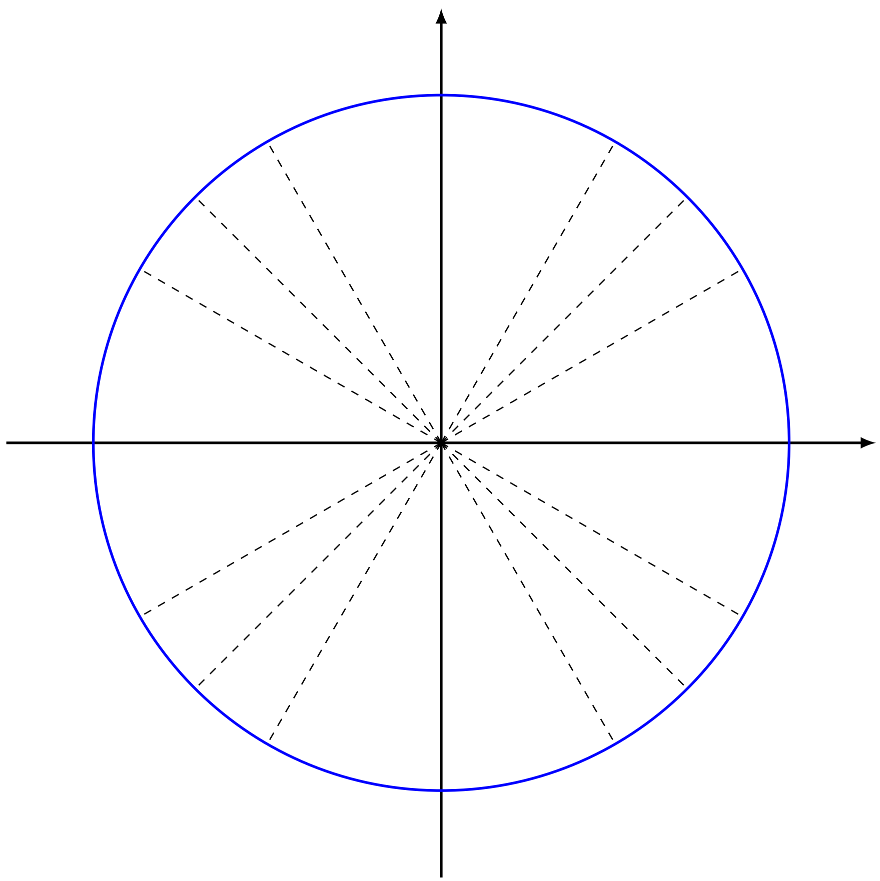
1. $\frac{13\pi}{4}$
2. $\frac{8\pi}{3}$
3. $\frac{11\pi}{6}$
4. $\frac{21\pi}{2}$
5. $-\frac{17\pi}{4}$

Exercice 8:
Déterminer la mesure principale des angles dont une mesure est :

1. $-\dfrac{11\pi}{3}$
2. $-\dfrac{19\pi}{6}$
3. $\dfrac{221\pi}{4}$
4. $-\dfrac{121\pi}{3}$
5. $\dfrac{365\pi}{6}$

Exercice 9:
Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D, E, F, G, H, I et J associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels suivants:

1. 13π
2. $\dfrac{3\pi}{4}$
3. $-\dfrac{11\pi}{4}$
4. -26π
5. $-\dfrac{16\pi}{3}$
6. $\dfrac{101\pi}{2}$
7. $\dfrac{37\pi}{2}$
8. $-\dfrac{7\pi}{6}$
9. $\dfrac{28\pi}{3}$
10. $-\dfrac{15\pi}{6}$



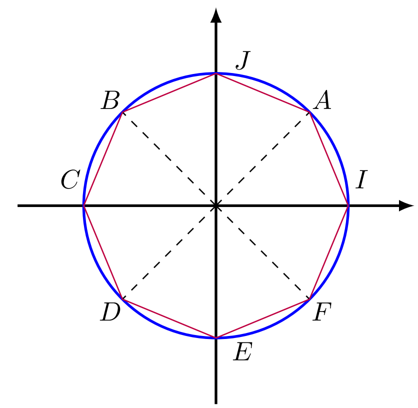
Exercice 10:
Placer sur le cercle trigonométrique les points K, L, M, N, O, P, Q et R associés respectivement, par enroulement de la droite numérique, aux nombres réels suivants:

1. $\frac{50\pi}{3}$
2. $\frac{19\pi}{6}$
3. $-\frac{25\pi}{4}$
4. 151π
5. $\frac{25\pi}{2}$
6. $-\frac{43\pi}{3}$
7. $\frac{2\pi}{15}$
8. $-\frac{7\pi}{10}$

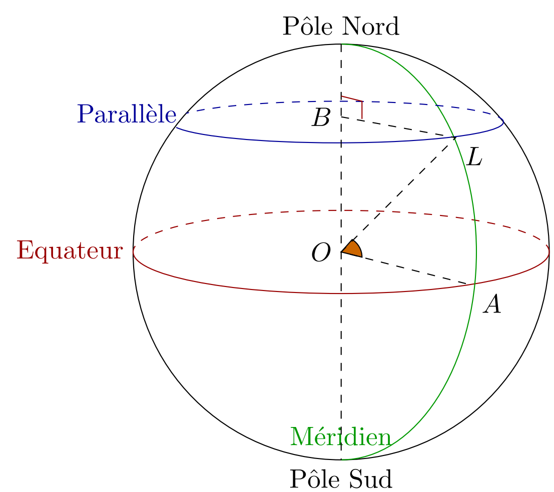
Exercice 11:

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. $IAJBCDEF$ est un octogone régulier de centre O. Donner un nombre $[0; 2\pi[$ associé à chacun des sommets de cet octogone.
2. Donner de même un nombre réel associé à chacun des sommets d'un hexagone régulier $IGHKLM$ de centre O inscrit dans le cercle trigonométrique.



Exercice 12:
On assmile à la Terre à une sphère de centre O et de rayon $6371km$.
On rappelle que l'équateur et les méridiens sont des grands cercles de la sphère terrestre. Un parallèle est un cercle de la sphère terrestre parallèle à l'équateur.



1. Calculer la longueur, arrondie au km, de l'équateur. En déduire la longueur d'un méridien terrestre.
2. Le point L représente la ville de Londres située sur le 50^e parallèle Nord. En déduire, au degré près, la latitude de Londres, c'est-à-dire la mesure de l'angle $\widehat{LOA}$, suivie de l'indication Nord ou Sud.
3. Calculer la plus courte distance, arrondie au km, sur la sphère terrestre entre Londres et l'équateur.

Exercice 13:
Sans utiliser la calculatrice et en utilisant des valeurs remarquables, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivant :

1. $\dfrac{15\pi}{3}$
2. $-\dfrac{9\pi}{4}$
3. $-\dfrac{7\pi}{6}$
4. $-\dfrac{5\pi}{2}$

Exercice 14:
Sans utiliser la calculatrice et en utilisant des valeurs remarquables, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivant :

1. $-\dfrac{28\pi}{3}$
2. $\dfrac{2018\pi}{4}$
3. $\dfrac{101\pi}{6}$
4. $\dfrac{70\pi}{3}$

Exercice 15:
Sans utiliser la calculatrice et en utilisant des valeurs remarquables, déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus des nombres réels suivant :

1. $-\dfrac{25\pi}{4}$
2. $-\dfrac{15\pi}{2}$
3. $\dfrac{43\pi}{4}$
4. $\dfrac{1981\pi}{3}$

C**Exercice 16:**
Parmi les égalités suivantes, déterminer lesquelles sont vraies :

1. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
2. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
3. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
4. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

Exercice 17:
Calculer et simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
2. $\cos(0)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1$
3. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
4. $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

Exercice 18:
Dans chaque cas, déterminer le ou les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ vérifiant la condition donnée.

1. $\sin(x) = \frac{1}{2}$ et $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$
2. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$
3. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice 19:
Dans chaque cas, déterminer le ou les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ vérifiant la condition donnée.

1. $\cos(x) = -1$ et $x \in \left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$
2. $2\cos(x) + 1 = 0$ et $x \in [-\pi; \pi[$

Exercice 20:
Dans chaque cas, déterminer le ou les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ vérifiant la condition donnée.

1. $\cos(x) = \sin(x)$ et $x \in [-\pi; \pi[$
2. $2\cos^2(x) - 1 = 0$ et $x \in [-\pi; \pi[$

Exercice 21:
Dans cet exercice, on admettra la formule suivante, valable pour tous réels a et b :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

1. A l'aide de cette formule, démontrer les formules suivantes :
   (a) Pour tout réel x, $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$.
   (b) Pour tout réel x, $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$.
2. Montrer que, pour tout réel x, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Exercice 22:
Dans cet exercice, on admettra vrai la formule de la question 2 de l'exercice précédent.

1. Justifier que, pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
2. En déduire que pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.
3. En appliquant la formule précédente pour $x = \dfrac{\pi}{8}$, déterminer la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
4. En utilisant la même méthode, déterminer la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$.

Exercice 23:
Calculer chaque expression, donner si nécessaire le résulat sous forme d'une fraction simplifiée.

1. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$
2. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
3. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
4. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos(\pi)$

Exercice 24:

1. Vérifier que $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}$.
2. Exprimer $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 25:
On admet que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
2. Sachant que $\frac{6\pi}{5}=\pi+\frac{\pi}{5}$, en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$.
3. Sachant que $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$, en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.

Exercice 26:
Simplifier les expressions suivantes :

1. $A=\cos(\pi+x)+2\cos(-x)$
2. $B=\sin(\pi+x)+2\sin(-x)$
3. $C=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+2\cos(-x)$
4. $D=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(-x)$

Exercice 27:
Simplifier les expressions suivantes :

1. $E=\cos(\pi-x)+\cos(\pi+x)-\cos(2\pi+x)$
2. $F=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

Exercice 28:

1. Simplifier l'expression $G=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\cos(-x)+3\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$
2. Calculer G quand $x=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 29:
Etudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

1. $f:x\mapsto\cos(2x)$
2. $g:x\mapsto 2\sin(x)-1$
3. $h:x\mapsto\sin(3x)$
4. $k:x\mapsto x-\cos(x)$

Exercice 30:
Etudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes :

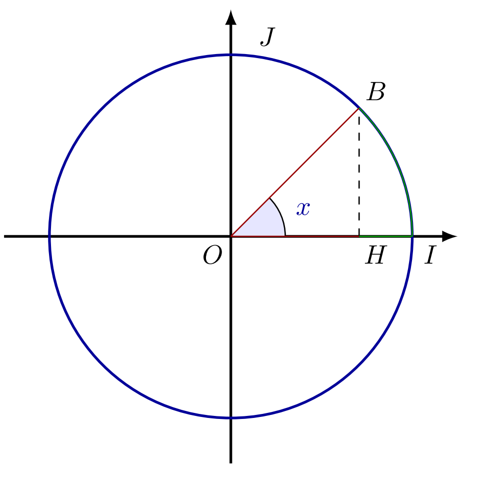
1. $\phi:x\mapsto\cos(x)\sin(x)$
2. $\psi:x\mapsto\cos^2(x)$
3. $\rho:x\mapsto\sin^2(x)$
4. $\theta:x\mapsto x+\sin(x)$

Exercice 31:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f:x\mapsto 2\cos(x)-1$.

1. Etudier la parité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la périodicité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre pour tout $x\in[0;\pi]$ l'équation $f(x)=0$.
4. Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J), tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$.

Exercice 32:

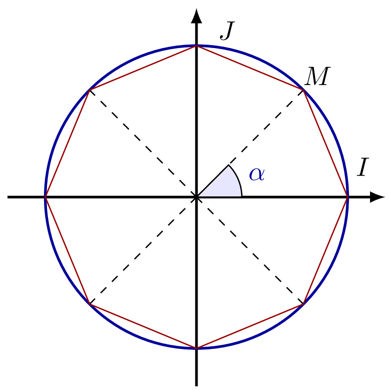
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J), on a représenté le cercle trigonométrique de centre O. B est un point du cercle trigonométrique associé à la mesure d'angle $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. H est le pied de la hauteur issue de B du triangle IOB.



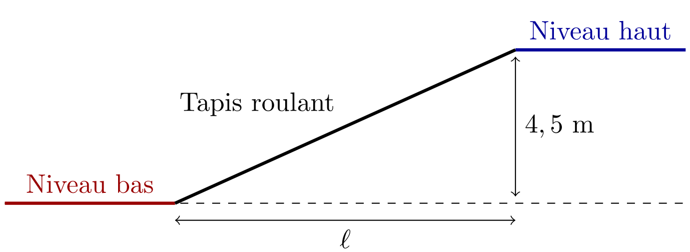
1. Exprimer la longueur l_1 du chemin rouge $(BO+OH)$ en fonction de x.
2. Exprimer la longueur l_2 du chemin bleu $(\widehat{BI}+IH)$ en fonction de x.
3. Pour quelle valeur du nombre x la longueur du chemin rouge est-elle égale à celle du chemin bleu ? On donnera une valeur approchée de x à 10^{-2}.

Exercice 33:
Un polygone régulier à n côtés est inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O. La figure ci-contre représente un octogone.

1. Dans ce cas $n = 8$ et $\widehat{IOM} = \alpha = \dfrac{\pi}{4}$, calculer l'aire A_8 de cet octogone.
2. De façon générale, pour un polygone régulier à n côtés, on pose $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$. Démontrer que l'aire d'un polygone régulier à n côtés est égale à
$$A_n = \pi \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$$
3. A l'aide d'un outil numérique, représenter sur $[0;\pi]$ la fonction f définie par $f : x \mapsto \pi \dfrac{\sin(x)}{x}$.
4. A l'aide de la courbe représentative de f, si n devient très grand, quelle conjecture peut-on faire ? En déduire une autre conjecture géométrique concernant l'aire du polygone inscrit.

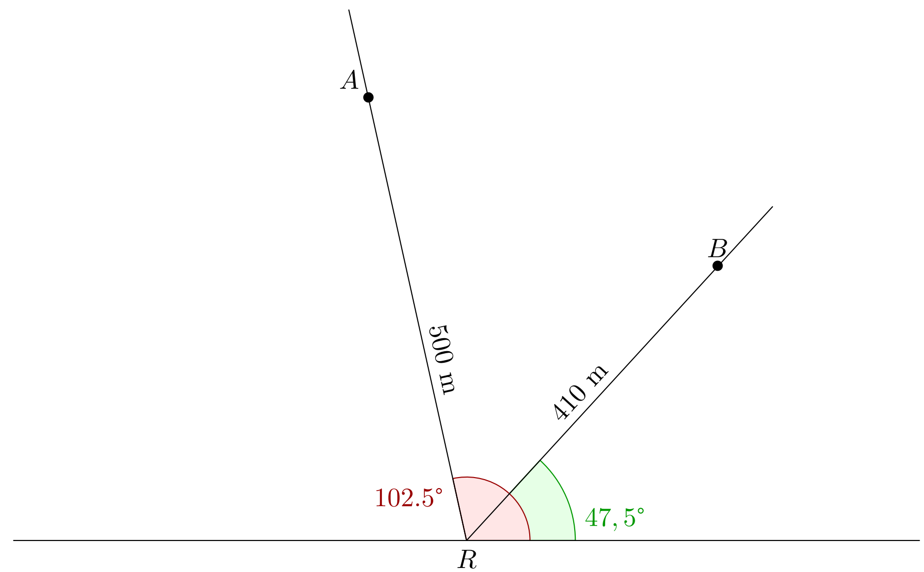


Exercice 34:
Dans un aéroport en construction, un architecte souhaite installer un tapis roulant pour permettre au public de passer d'un niveau à l'autre en moins d'une minute.



Le tapis roulant sélectionné, représenté ci-dessus , possède une vitesse de roulement de $0,8$ m.s^{-1} et une pente maximale de 10%. La distance entre kes deux niveaux est de $4,5$ m et on note ℓ la longueur au sol du niveau bas occupée par le tapis roulant. Donenr un encadrement de la longueur ℓ pour que les contraintes soient satisfaites. On pourra utiliser la calculatrice.

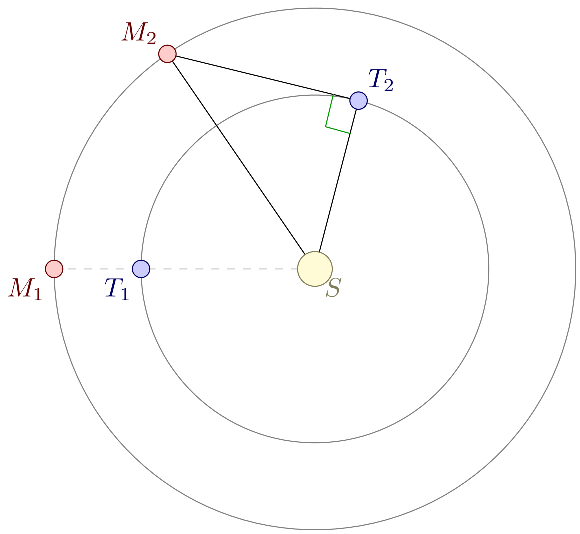
Exercice 35:
Deux petits avions A et B se déplacent en bordure d'une plage en été, l'un pour déployer un banderole publicitaire et l'autre pour photographier la plage.
Dans le même plan vertical que ces deux avions, un radar R repère du sol de la plage leur position comme sur la figure ci-dessous.
Par arrêté municipal dans cette commune et pour des raison de sécurité, la hauteur minimale de survol de la plage est fixée à $300m$ et la distance horizontale minimale séparant deux avions est de $500m$.
Ces deux avions respectent-ils les distances de sécurité imposées ? Justifier.



Exercice 36:
La planète Mars, aussi appelée la planète rouge, peut-être observée à l'oeil nu depuis la Terre.
Comme la Terre, Mars tourne autour du Soleil sur une orbite quasi circulaire. Les orbites de la Terre et de Mars sont à peu près coplanaires.
Les astronomes ont observé qu'à un moment précis d'une année, le Soleil, la Terre et Mars étaient en "opposition", c'est-à-dire que ces trois astres étaient alignés, avec la Terre entre Mars et le Soleil.

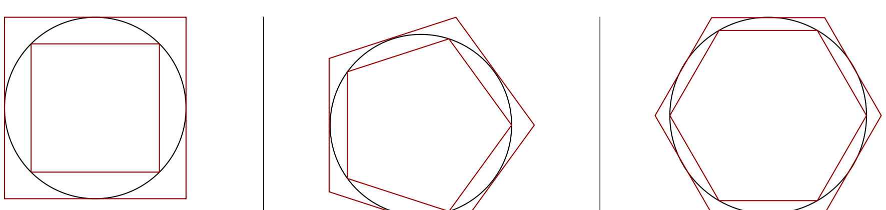
On note T_1 et M_1 les positions respectives de la Terre et de Mars à cet instant et S la position du Soleil. Cent six jours plus tards, la Terre et Mars se sont déplacées pour atteindre les positions respectives T_2 et M_2 et sont alors en quadrature avec le Soleil, c'est-à-dire que l'angle $\widehat{M_2T_2S}$ est droit.

1. Calculer une valeur approchée au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{M_1SM_2}$, sachant que Mars tourne autour du Soleil en 687 jours.
2. Calculer une valeur approchée au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{T_1ST_2}$, puis de l'angle $\widehat{M_2ST_2}$ sachant que la Terre tourne autour du Soleil en 365 jours.
3. En déduire la distance de Mars au Soleil en fonction de celle de la Terre au Soleil.



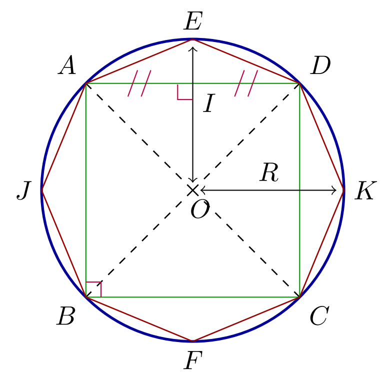
1.3 Algorithmes et Python

Exercice 18:
Vers 250 avant $J-C$, pour trouver une approximation de π, Archimède a encadré le périmètre d'un cercle par les périmètres de polygones réguliers de même nature inscrits et circonscrits à ce cercle.



1^{ere} ***méthode : avec le théorème de Pythagore***

1. $ABCD$ est un carré de côté c_1 inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R comme sur la figure ci-contre.
   (a) Exprimer c_1 en fonction de R en utilisant le théorème de Pythagore.
   (b) Exprimer le périmètre p_1 de ce carré en fonction de R.
   (c) Quelle valeur de R faut-il choisir pour que p_1 soit une approximation de π?



2. On cherche à calculer le périmètre p_2 de l'octogone $AEBKDFCJ$ de côté c_2 inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$. La médiatrice de $[AB]$ coupe $\mathcal{C}$ en E et $[AB]$ en I. A l'aide du théorème de Pythagore, exprimer la longueur EI en fonction de AB et de R. En déduire c_2, puis p_2 en fonction de c_1 et R.
3. (a) Ecrire un algorithme qui permet d'obtenir le côté et le périmètre d'un polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans un cercle de rayon R.
   (b) Programmer cet algorithme en Python.
   (c) Exécuter ce programme et comparer les résultats obtenus avec ceux d'Archimède qui a trouvé $3+\dfrac{10}{71}<\pi<3+\dfrac{1}{7}$.

2^{eme} ***méthode : avec la trigonométrie***

On cherche à encadrer la valeur de π par le périmètre p_n d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1 et le périmètre d'un polygone P_n à n côtés circonscrit à ce cercle (n pair).

1. Sur la figure ci-dessous, $n=6$. Calculer dans ce cas la mesure de l'angle α, en degrés, puis montrer que :

$$AB = 2\sin(\alpha) \quad \text{et} \quad A'B' = 2\tan(\alpha)$$

   En déduire p_6 et P_6.

2. Si on généralise à des polygones réguliers à n côtés (n pair), exprimer p_n et P_n en fonction de n.

3. Calculer les valeurs de p_n, P_n et $P_n - p_n$ pour n pair jusqu'à $n = 96$ (valeurs calculées par Archimède).

4. Que peut-on conclure au sujet de l'encadrement de π obtenu ?