Exercice 1 : Tronc commun *(... / 3 points)*

Sur un affichage des résultats au concours d'entrée dans un institut de formation en soins infirmiers (IFSI), on peut lire le tableau suivant :

	Filière générale	**Filière technologique**	**Total**
Admis	26	14	40
Refusé	16	4	20
Total	42	18	60

Dans les questions suivantes, on exprimera le résultat sous forme de fraction sans chercher à le calculer.

1. Calculer la fréquence de candidats venant d'une filière technologique.
2. Calculer la fréquence de candidats venant d'une filière technologique et qui sont admis.
3. Calculer la fréquence de candidats venant d'une filière technologique parmi ceux qui ont été admis.

Solution :

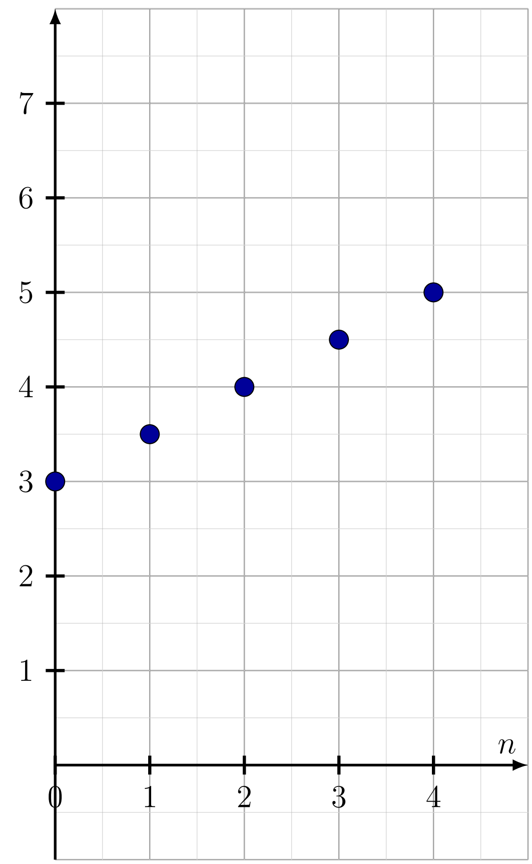
1. La fréquence de candidats venant d'une filière technologique est de $\frac{18}{60}$.
2. La fréquence de candidats venant d'une filière technologique et qui sont admis et de $\frac{14}{60}$.
3. La fréquence de candidats venant d'une filière technologique parmi ceux qui ont été admis est de $\frac{14}{40}$.

Exercice 2 : Tronc commun *(... / 5 points)*

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $u_n = \frac{1}{2}n + 3$.
   (a) Calculer les termes de u_0 jusque u_4.
   (b) Représenter les termes calculés précédemment dans un repère adapté.
   (c) Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
   (d) Calculer $u_{n+1} - u_n$. Que peut-on en déduire sur le sens de variation de la suite ?
2. Soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = 1 + \frac{1}{w_n}$.
   Calculer w_1, w_2 et w_3. On exprimera chaque résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
3. *(bonus : 1 point)* On définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $s_0 = 2$ et $s_1 = 4$ et pour tout entier n, $s_{n+2} = s_{n+1} - s_n$.
   Calculer s_4.

Solution :

1. (a) On a $u_0 = 3$, $u_1 = 3,5$, $u_2 = 4$, $u_3 = 4,5$ et $u_4 = 5$.
   (b) On a :



(c) On a $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(n+1) + 3 = \dfrac{1}{2}n + \dfrac{7}{2}$.

(d) On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}n + \dfrac{7}{2} - \left(\dfrac{1}{2}n + 3\right) = \dfrac{1}{2} > 0$.
La suite (u_n) est donc croissante.

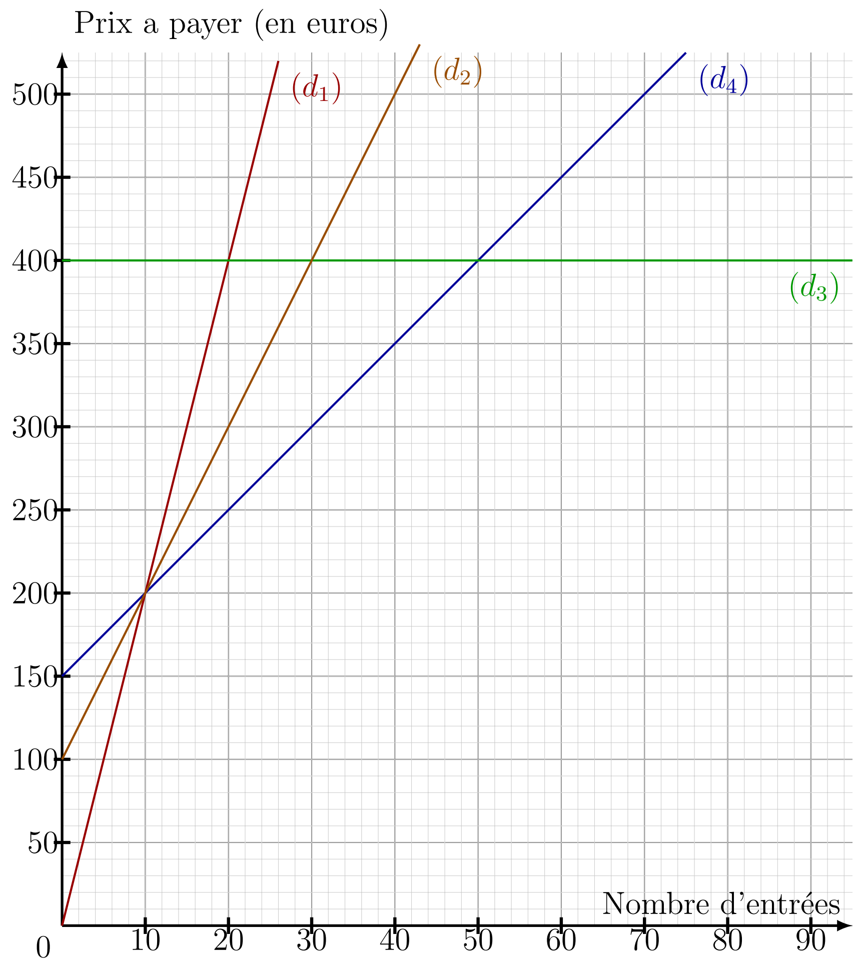
2. On a $w_1 = 1 + \dfrac{1}{w_0} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, $w_2 = 1 + \dfrac{1}{w_1} = 1 + \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{5}{3}$ et $w_3 = 1 + \dfrac{1}{w_2} = 1 + \dfrac{1}{\frac{5}{3}} = \dfrac{8}{5}$.

3. On a $s_2 = s_1 - s_0 = 4 - 2 = 2$, $s_3 = s_2 - s_1 = 2 - 4 = -2$ et $s_4 = s_3 - s_2 = -2 - 2 = -4$.

Exercice 3 : Tronc commun *(... / 5 points)*
Une salle d'escalade propose 3 tarifs différents :

- Tarif 1 : 20 euros par entrée.
- Tarif 2 : 100 euros l'abonnement qui permet de payer 10 euros l'entrée.
- Tarif 3 : 400 euros la carte qui permet d'aller autant qu'on veut à la salle.

1. Une personne souhaite aller 16 fois à la salle d'escalade, combien paierait-elle pour chaque tarif ?
2. On note x le nombre d'entrées à la salle d'escalade.
Ecrire en fonction de x, $P_1(x)$; $P_2(x)$ et $P_3(x)$ le prix a payé selon le tarif choisi.



3. Sur le graphique ci-contre, on a tracé les représentations graphiques (d_1) et (d_3) des fonctions P_1 et P_3.
   Tracer la droite (d_2), représentation graphique de la fonction P_2.

4. La salle d'escalade définit un nouveau tarif 4 représenté sur le graphique par (d_4).
   Exprimler $P_4(x)$ en fonction de x.

5. Expliquer qualitativement, en fonction du nombre d'entrées, quel tarif est le plus avantageux.

Solution :

1. Pour le tarif 1, la personne paierait $16 \times 20 = 320$ euros.
   Pour le tarif 2, la personne paierait $100 + 16 \times 10 = 260$ euros.
   Pour le tarif 3, la personne paierait 400 euros.

2. On a pour x entrées, les prix suivants pour les tarifs respectifs 1, 2 et 3 :

$$P_1(x) = 16x \quad \text{et} \quad P_2(x) = 10x + 100 \quad \text{et} \quad P_3(x) = 400$$

4. On a $P_4(x) = 5x + 150$.

5. Entre 0 et 10 entrées, le tarif 1 est le plus intéressant.
   Entre 10 et 50 entrées, le tarif 4 est le plus intéressant.
   Au delà de 50 entrées, le tarif 3 est le plus intéressant.
   On constate que depuis la mise en place du tarif 4, le tarif 2 n'est à aucun moment le plus avantageux.

<u>Exercice 4 :</u> Spécialité Maths-Physique *(... / 5 points)*

1. Donner la valeur de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$ et de $\sin\left(-\dfrac{4\pi}{2}\right)$.
   On pourra s'appuyer sur le cercle trigonométrique.

2. On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = \dfrac{2+i}{2-i}$.

   (a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z_1.

   (b) Calculer $(2+i)^2$.

   (c) Déterminer le conjugué $\overline{z_1}$ de z_1 et $\overline{z_2}$ de z_2.

   (d) Exprimer z_2 sous forme algébrique. En déduire la forme algébrique de $z_3 = z_1 + z_2$.

Solution :

1. On a $\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{4\pi}{2}\right) = 0$.

2. (a) La partie réelle de z_1 est 1 et se partie imagaire est -2.

   (b) On a $(2+i)^2 = (2+i)(2+i) = 4 + 2i + 2i + i^2 = 3 + 4i$.

   (c) On a $\overline{z_1} = 1 + 2i$ et $\overline{z_2} = \dfrac{2-i}{2+i}$.

   (d) On a $z_2 = \dfrac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{3+4i}{2^2+1^2} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$.
   On en déduit que $z_3 = z_1 + z_2 = 1 - 2i + \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i = \dfrac{8}{5} - \dfrac{6}{5}i$.