Chapitre 2 : Produit scalaire

Axel Carpentier

Première technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

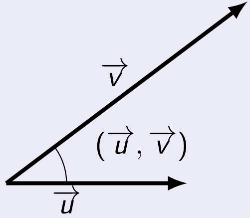
Table des matières

Aspect trigonométrique

Définition/Propriété:

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle produit scalaire le nombre réel $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$ (ou $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$) défini par :

$$\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$$



Exemple:
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2. On a alors :

$$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 2 \times 2 \times \cos(\frac{\pi}{3}) = 2$$

Définition/Propriété:

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires. On a :

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| & \text{Si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| & \text{Si } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Exemple:

Soient A, B, C et D quatre points alignés tels que $AB = 2$, $BC = 3$ et $CD = 1$.

On a alors :

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| = 2 \times 5 = 10 \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB} \rangle = -\|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| = -6 \times 3 = -18$$

Aspect trigonométrique

Propriété:

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs quelconques et un nombre réel k, on a :

- $$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$$
- $$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle$$
- $$\langle \overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v} \rangle = \langle k\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = k\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$$

Remarque

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, on a :

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = \|\overrightarrow{u}\|^2$$

Définition:

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits orthogonaux si et seulement si $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.

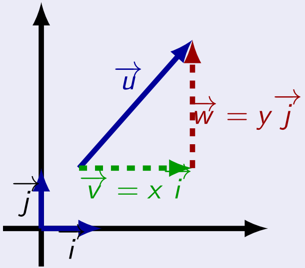
Exercice:
On considère un carré $ABCD$ de côté a et de centre O. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ $[CD]$ et $[DA]$.
Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

- $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK} \rangle$
- $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD} \rangle$
- $\langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC} \rangle$
- $\langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OI} \rangle$

Définition:

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u} = \binom{x}{y}$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose selon les deux axes du repère en deux vecteurs $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{w} = y\overrightarrow{j}$ de telle sorte que :

- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{v}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur l'axe des abscisses.
- $\overrightarrow{w}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur l'axe des ordonnées.



Aspect projectif

<u>Exemple:</u>

Pour $\overrightarrow{u} = \binom{1}{2}$, on a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} = \binom{1}{0}$ et $\overrightarrow{w} = \binom{0}{2}$.

Remarque

En physique, une force est un vecteur $\overrightarrow{F}$, il est donc compliqué de travailler des équations de la physique directement avec des vecteurs.
Pour cela, on écrit la loi de Newton puis on projète sur les axes (Ox) et (Oy) pour obtenir deux équations de réelles. C'est-à-dire qu'on effectue le produit scalaire $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{j}$.

Définition/Propriété:

Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u} = \binom{x}{y}$ et $\overrightarrow{v} = \binom{x'}{y'}$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On a alors :

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = xx' + yy'$$

Exercice:
Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{u} = \binom{2}{4}$ et $\overrightarrow{v} = \binom{-1}{-2}$
- $\overrightarrow{w} = \binom{1}{-3}$ et $\overrightarrow{z} = \binom{-3}{-9}$

Théorème d'Al-Kashi

Théorème:

Soit ABC un triangle quelconque. On note : $\left\{\begin{array}{ccc} a = BC & b = CA & c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} & \hat{B} = \widehat{ABC} & \hat{C} = \widehat{BCA} \end{array}\right.$

Alors : $\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}) \\ b^2 & = & c^2 + a^2 - 2ca\cos(\hat{B}) \\ c^2 & = & a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C}) \end{array}\right.$

Exemple:

- Dans un triangle KLM, on a $KL = 5$, $KM = 2\sqrt{2}$ et $\widehat{MKL} = 45$. On calcule LM par :

$$LM^2 = KL^2 + KM^2 - 2 \times KL \times KM \times \cos(\widehat{MKL})$$

  A partir de là il est possible de déterminer la mesure de l'angle $\widehat{LMK}$.
- Dans un triangle ABC, on a $AB = 6$, $BC = 14$ et $\widehat{BAC} = 60°$. Déterminer AC.

Exercice bilan

1. Soit un rectangle $ABCD$ de longueur 6 et de largeur 4.
   Calculer :

   1.1 $\langle \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} \rangle$

   1.2 $\langle \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{BD} \rangle$

2. Déterminer la valeur de m tel que $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} m-8 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2m-7 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
3. Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $\hat{C} = 45°$.
   Déterminer la valeur de BC puis de $\hat{A}$ et $\hat{B}$.