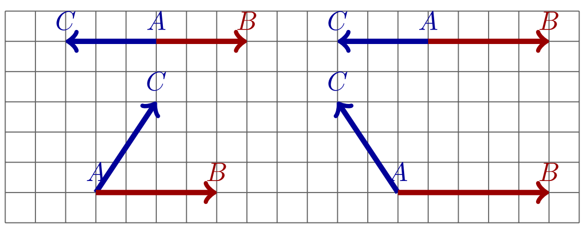
1 Produit scalaire

1.1 Compétences Attendues

- Calculer la projection d'un vecteur sur un axe.
- Interpréter $\|\overrightarrow{u}\| \times \cos(\theta)$ en termes de projection.
- Utiliser un produit scalaire pour démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs, pour calculer un angle non orienté.
- Utiliser un produit scalaire pour calculer des longueurs.

1.2 Exercices

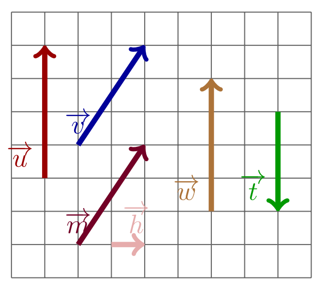
Exercice 1:
Calculer $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ dans chaque cas. Les carrés du quadrillage sont de côté 1.



Exercice 2:

Calculer les valeurs des produits scalaires suivants. Les carrés du quadrillage sont de côté 1.

1. $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$
2. $\langle \overrightarrow{t}, \overrightarrow{w} \rangle$
3. $\langle \overrightarrow{m}, \overrightarrow{h} \rangle$
4. $\langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle$
5. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$
6. $\langle \overrightarrow{m}, \overrightarrow{u} \rangle$



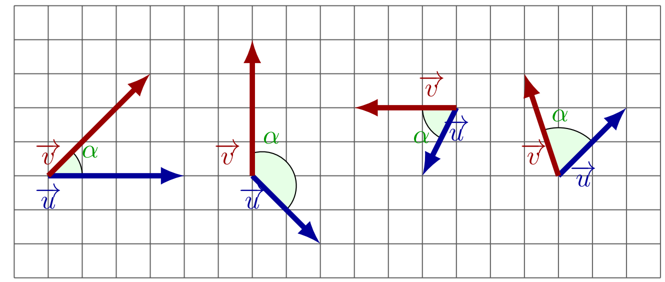
Exercice 3:

1. Pour chaque figure ci-dessous, calculer :

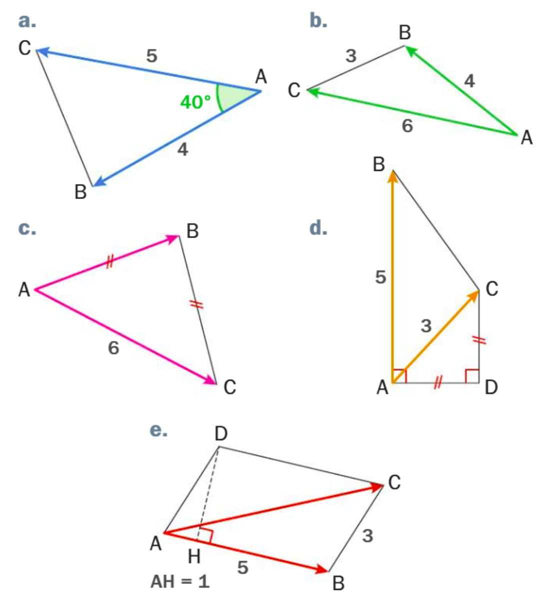
   (a) $\|\overrightarrow{u}\|$ et $\|\overrightarrow{v}\|$

   (b) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$

2. En déduire la valeur de l'angle géométrique α.



Exercice 4:
Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ en choisissant une méthode adaptée.



Exercice 5:
Soit ABC un triangle.

1. Déterminer, si possible, la longueur AC.

   (a) $AB = 3$, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = -6$, $\widehat{BAC} = 60°$.

   (b) $AB = 5$, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = -10$, $\widehat{BAC} = 135°$.

2. Déterminer, si possible, une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

   (a) $AB = 2$, $AC = \sqrt{2}$, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = -2$.

   (b) $AB = 5$, $AC = 2$, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 15$.

   (c) $AB = 3$, $AC = 4$, $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 12$.

Exercice 6:
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs : $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 5$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 7$. Calculer :

1. $\overrightarrow{u} \cdot (3\overrightarrow{v})$
2. $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$
3. $\overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

Exercice 7:
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2\sqrt{2}$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -1$.
On pose $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{V}$. Calculer :

1. $\|\overrightarrow{w}\|$
2. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
3. $\overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w})$

Exercice 8:
Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$
2. $\langle \overrightarrow{u}, -4\overrightarrow{v} \rangle$
3. $\langle -\overrightarrow{u}, 2\overrightarrow{v} \rangle$
4. $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \rangle$

Exercice 9:
$ABCD$ est un rectangle de longueur $AB = 6$ et de largeur $AC = 4$. E est un point du segment $[AB]$ défini par $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. F est le projeté orthogonal du point B sur la droite (ED).

1. En calculant le produit scalaire $\langle \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED} \rangle$ de deux façons différentes, calculer l'angle $\widehat{DEC}$.
2. En calculant le produit scalaire $\langle \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DE} \rangle$ de deux façons différentes, calculer la longueur BF.

Exercice 10:
Les couples de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ suivants sont-ils orthogonaux ?

1. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{pmatrix}$

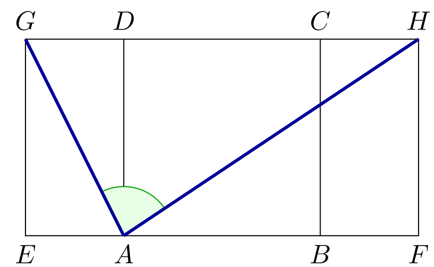
Exercice 11:
Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ et déterminer la (ou les) valeur(s) éventuelle(s) de m telle(s) que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux.

1. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 5-m \\ m \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} m-2 \\ m \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3-m \\ m \end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -m \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} m \\ 4 \end{pmatrix}$
4. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ m \end{pmatrix}$

Exercice 12:
Utiliser le produit scalaire dans chaque cas pour déterminer si le triangle ABC est rectangle.

1. $A(-2; 2)$, $B(8; 4)$ et $C(3; -2)$
2. $A(-1; 1,5)$, $B(0; 4)$ et $C(5; 2)$
3. $A(8; 2)$, $B(2; 4)$ et $C(-2; -8)$

Exercice 13:
$ABCD$ est un carré de côté 4. $ABCD$ et $BFHC$ sont deux rectangles de largeur 2. Etudier la perpendicularité des droites (AG) et (AH) en calculant le produit scalaire $\langle \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AH} \rangle$.



Exercice 14:
Soient $A(6; 1)$ et $B(-3; 3)$ deux points du plan et $\mathcal{D}$ une droite d'équation $y = 2x$ où $x, y \in \mathbb{R}$.
On cherche à déterminer s'il existe des points M appartenant à la droite $\mathcal{D}$ tels que les droites (AM) et (BM) soient perpendiculaires. On note $M(x; y)$.

1. Si $M \in \mathcal{D}$, établir une relation entre x et y.
2. Exprimer en fonction de x les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.
3. Calculer $\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle$ en fonction de x puis conclure.

Exercice 15:
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $ABCD$ un carré de côté a. E est un point du segement $[AB]$ et F le point du segment $[AD]$ tel que $AE = DF$. On pose $AE = x$.

1. Exprimer en fonction de a et de x les produits scalaires $\langle \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EA} \rangle$ et $\langle \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{AD} \rangle$.
2. Démontrer que les droites (CF) et (ED) sont perpendiculaires.

Exercice 16:

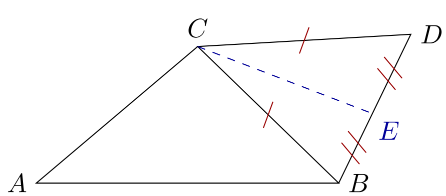
1. Dans un tiangle ABC, $AB = 6$, $AC = 15$ et $BC = 10$.
   Calculer une valeur approchée de la mesure de chaque angle.
2. Dans un triangle DEF, $DE = 10$, $DF = 7$ et $\widehat{D} = 60°$.
3. Sachant que $IJ = 32$, $IK = 20$ et que $\widehat{JIK} = 30°$, calculer la longueur JK.
4. Estimer l'angle $\widehat{GHL}$, sachant que $GH = 22$, $HL = 21$ et $GL = 25$.

Exercice 17:
Le triangle MNP est défini par $MN = 9$, $MP = 5$ et $NP = 7,5$.
On note M', N' et P' les milieux respectifs des segments $[NP]$, $[MP]$ et $[MN]$.
Calculer la longueur de chaque médiane.

Exercice 18:
On donne $AB = 5$, $BC = 3$ et $\widehat{B} = 60°$.

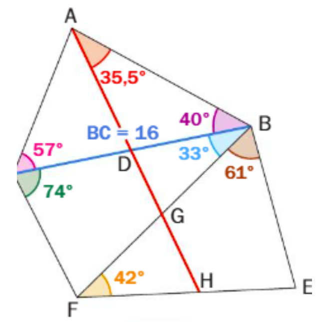
1. Calculer la longueur AC.
2. En déduire $\widehat{A}$ puis $\widehat{C}$.

Exercice 19:
Le triangle ABC est tel que $AC = 7$, $AB = 10$ et $BC = 6,5$.



1. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.
2. Sachant que $\widehat{BCD} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACB}$, déterminer une valeur approchée de CE, où E est le milieu du segment $[BD]$.

Exercice 20:
Afin d'estimer la longueur AG, on part d'une mesure connue ($BC = 16km$) et on construit une chaîne de triangles dont les angles sont de mesures connues. Estimer la longueur AG.

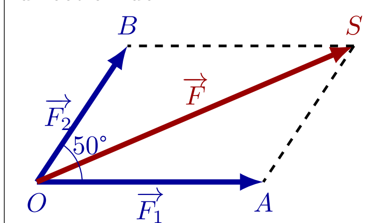


Exercice 21:

Soit $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ deux forces s'exerçant sur un même point O et d'intensité $F_1 = 40$ N et $F_2 = 30$ N en formant un angle de $50°$ comme l'illustre le schéma.

Ces deux forces s'exerçant simultanément sur O peuvent être résumées par une seule force $\overrightarrow{F}$ appelée force résultante et obtenue par la relation $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$.

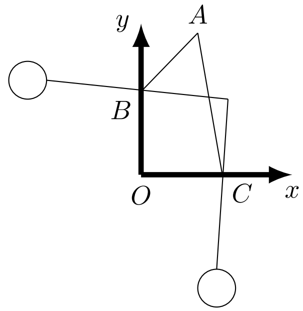
On souhaite déterminer l'intensité et la direction de $\overrightarrow{F}$.



1. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{OAS}$.
2. En déduire la valeur approchée à 0,01 près de la distance OS.
3. Calculer enfin l'angle $\widehat{AOS}$ à 0,1° près.
4. Conclure par rapport au problème posé.

Exercice 22:
Le train avant d'un avion A380 est représenté par le schéma ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle).
Le segment $[AC]$ représente le vérin en position "train sorti" et le segment $[AB]$ le vérin en position "train rentré".
On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont les vecteurs unitaires de (Ox) et (Oy). En prenant $1m$ comme unité graphique, on a repéré les points $A(0,8;2)$, $B(0;1,2)$ et $C(1,1;0)$. Le but de l'exercice est déterminer l'allongement $\delta = AC - AB$ et le débattement $\alpha = \widehat{BAC}$ du vérin.

1. (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) En déduire l'allongement du vérin, arrondi au millimètre près.
2. (a) Calculer le produit scalaire $\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle$.
   (b) En déduire une mesure de α au dixième de degré près

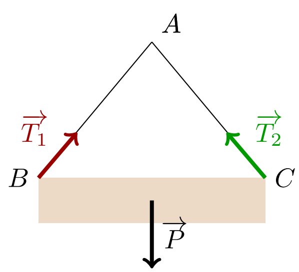


Exercice 23:
Afin de réduire les pertes aérodynamiques, les concepteurs de véhicules s'imposent une contrainte : la mesure de l'angle "capot/par-brise" doit être supérieure à 150°.
On considère $O(0;0)$ l'origine d'un repère du plan (la jonction capot/pare-brise), $C(-92,7;-24,7)$ le bout du capot et $B(67,9;37)$ le bout du pare-brise.
La contrainte imposée est-elle vérifiée ? On pourra s'aider d'une représentation graphique.

Exercice 24:

Une pourtrelle de poids inconnu est soulevée par deux élingues (accessoires de levage) $[AB]$ et $[AC]$ selon le schéma ci-contre :

Les forces imposées dans les élingues et le poids de la poutrelle sont respectivement représentées par les vecteurs $\overrightarrow{T_1}$, $\overrightarrow{T_2}$ et $\overrightarrow{P}$.
$\alpha = \widehat{BAC}$ est l'angle entre deux élingues.



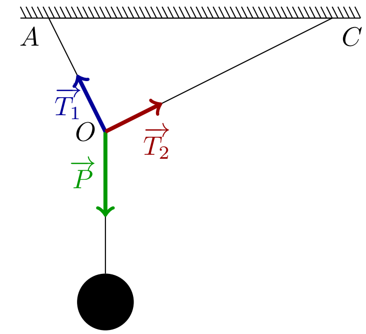
1. On considère un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm, où 1cm représente 1 000 Newton. $\overrightarrow{T_1}$ est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ de coordonnées $(4;5)$ et $\overrightarrow{T_2}$ par $\overrightarrow{OM_2}$ de coordonnées $(-4;5)$. Placer les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ dans ce repère.
2. (a) Construire dans ce repère le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.
   (b) Calculer les coordonnées du point M.
   (c) Tracer le vecteur $\overrightarrow{P} = -\overrightarrow{OM}$ et donner ses coordonnées.
   (d) En déduire la valeur, en Newton, du poids de la charge.
3. (a) Calculer $\langle\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}\rangle$, $\|\overrightarrow{OM_1}\|$ et $\|\overrightarrow{OM_2}\|$.
   (b) En déduire un valeur approchée à l'unité de la tension dans chaque élingue, exprimée en Newton.
   (c) Déterminer l'angle d'élingage α, arrondi au degré.

Exercice 25:

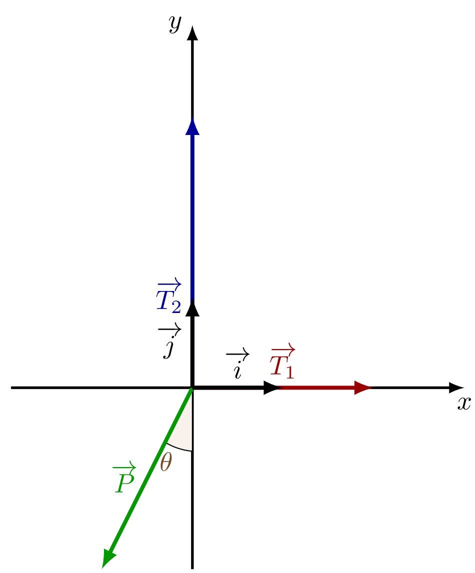
Un solide est en équilibre suspendu en O par deux cordes fixées en A et en C. Ce solide est soumis à trois forces :

- son poids : $\overrightarrow{P}$;
- les tensions $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$ des deux cordes.

On sait que $\|\overrightarrow{P}\| = 100$ N. Les cordes forment un angle $\widehat{OAC}$=60° et de $\widehat{OCA}$=30° avec le support horizontal comme indiqué sur le schéma ci-contre.



On cherche à déterminer l'intensité des deux autres forces. Pour cela, on se place dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.



1. Justifier que l'angle θ formé par $\overrightarrow{P}$ et l'axe des ordonnées vaut 30°.
2. On pose $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_x} + \overrightarrow{P_y}$ où $\overrightarrow{P_x}$ et $\overrightarrow{P_y}$ sont les projetés orthogonaux de $\overrightarrow{P}$ sur les axes (Ox) et (Oy). Calculer $\|\overrightarrow{P_x}\|$ et $\|\overrightarrow{P_y}\|$ en fonction de $\|\overrightarrow{P}\|$ et de θ.
3. Faire de même pour les vecteurs $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$.
4. Dire que le solide est en équilibre signifie que
$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = \overrightarrow{0}$$
. Montrer que
$$\begin{cases} \|\overrightarrow{T_2}\| - \|\overrightarrow{P}\|\sin(\theta) & = 0 \\ \|\overrightarrow{T_1}\| - \|\overrightarrow{P}\|\cos(\theta) & = 0 \end{cases}$$
5. En déduire l'intensité des forces $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$.