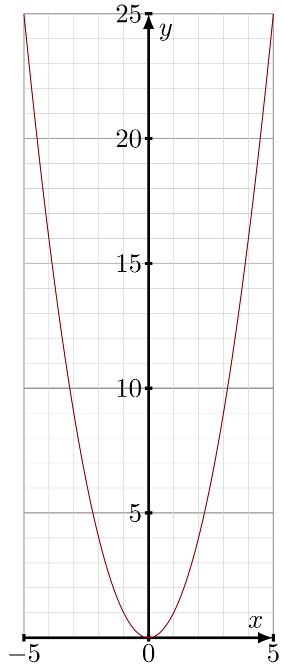
1 Fonctions de références

1.1 Compétences Attendues

- Pour deux nombres a et b donnés et f une fonction de référence : comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.
- Pour une fonction de référence, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$ ou $f(x) \leq k$.

1.2 Exercices

On considère la représentation graphique de la fonction carré ci-dessous sur laquelle on pourra s'appuyer si nécessaire :



Exercice 1:
Soit f la fonction carré, calculer :

1. $f(7)$.
2. l'image de -7 par f.
3. l'image de -9 par f.
4. $f(-4)$.
5. l'image de -5 par f.
6. $f(8)$.

Exercice 2:

1. Sans effectuer de calcul, comparer $5{,}872^2$ et $5{,}866^2$.
2. Sans effectuer de calcul, comparer $(-4{,}681)^2$ et $(-4{,}677)^2$.
3. Sans effectuer de calcul, comparer $2{,}581^2$ et $2{,}583^2$.

Exercice 3:

1. Sans effectuer de calcul, comparer $(-3{,}56)^2$ et $(-3{,}572)^2$.
2. Sans effectuer de calcul, comparer $(-2{,}69)^2$ et $(-2{,}708)^2$.
3. Sans effectuer de calcul, comparer $1{,}76^2$ et $1{,}742^2$.

Exercice 4:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $x^2 = 100$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $x^2 - 7 = -22$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $5x^2 + 7 = 8$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $-x^2 - 15 = -24$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $(x + 10)^2 = 9$
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $8x^2 + 10 = 7$

Exercice 5:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $-(2x)^2 - 12 = -61$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $(4x - 6)^2 = 81$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $(x - 1)^2 - 6 = -32$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $-x^2 + 5 = -6$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $(x - 5)^2 = 16$
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $8x^2 + 4 = 2$

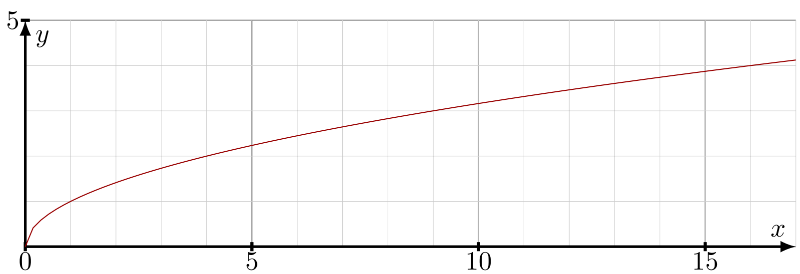
Exercice 6:

1. Si $2 \leq x \leq 6$, à quel intervalle appartient x^2 ?
2. Si $x < -4$, à quel intervalle appartient x^2 ?
3. Si $-5 < x \leq -4$, à quel intervalle appartient x^2 ?
4. Si $x \leq 5$, à quel intervalle appartient x^2 ?
5. Si $x \in]-4; -1] \cup]2; 5]$, à quel intervalle appartient x^2 ?

Exercice 7:

1. Si $1 \leq x^2 < 9$, à quel intervalle appartient x ?
2. Si $x^2 \leq 16$, à quel intervalle appartient x ?
3. Si $-2 < x^2 \leq 3$, à quel intervalle appartient x ?
4. Si $x^2 \in]4;9] \cup]16;25[$, à quel intervalle appartient x ?

On considère la représentation graphique de la fonction racine carrée ci-dessous sur laquelle on pourra s'appuyer si nécessaire :



Exercice 8: Soit f la fonction racine carrée, calculer :

1. $f(64)$.
2. l'image de 4 par f.
3. l'image de 1 par f.
4. $f(16)$.
5. $f(49)$.
6. l'image de 25 par f.
7. $f(81)$.
8. l'image de 100 par f.

Exercice 9:

1. Sans effectuer de calcul, comparer $\sqrt{4{,}7}$ et $\sqrt{5}$.
2. Sans effectuer de calcul, comparer $\sqrt{1{,}9}$ et $\sqrt{1{,}5}$.
3. Sans effectuer de calcul, comparer $\sqrt{7{,}9}$ et $\sqrt{7{,}7}$.

Exercice 10:

1. Sans effectuer de calcul, comparer $\sqrt{2{,}9}$ et $\sqrt{2{,}8}$.
2. Sans effectuer de calcul, comparer $\sqrt{3{,}8}$ et $\sqrt{4{,}3}$.
3. Sans effectuer de calcul, comparer $\sqrt{6{,}9}$ et $\sqrt{6{,}8}$.

Exercice 11:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{x} = -20$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{x} - 4 = -3$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$: $-2\sqrt{x} - 3 = 1$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$: $-\sqrt{x} + 10 = -10$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$: $-9\sqrt{x} - 6 = 0$
6. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{3x+2} = 5$

Exercice 12:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$: $-\sqrt{2x-1} + 9 = -8$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{x+9} + 8 = 8$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$: $-\sqrt{2x+8} - 2 = -\sqrt{4}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$: $8\sqrt{x} - 9 = -5$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{x} = -18$
6. Résoudre dans $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{4x^2-1} - 2 = 5$

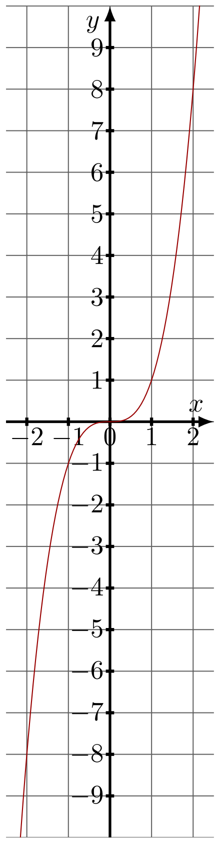
Exercice 13:

1. Si $2 \leq x \leq 6$, à quel intervalle appartient $\sqrt{x}$?
2. Si $x < 4$, à quel intervalle appartient $\sqrt{x}$?
3. Si $4 < x \leq 5$, à quel intervalle appartient $\sqrt{x}$?
4. Si $x \leq 5$, à quel intervalle appartient $\sqrt{x}$?
5. Si $x \in]4;9] \cup]16;25]$, à quel intervalle appartient $\sqrt{x}$?

Exercice 14:

1. Si $1 \leq \sqrt{x} < 9$, à quel intervalle appartient x ?
2. Si $\sqrt{x} \leq 16$, à quel intervalle appartient x ?
3. Si $-2 < \sqrt{x} \leq 3$, à quel intervalle appartient x ?
4. Si $\sqrt{x} \in]0;1] \cup]2;3[$, à quel intervalle appartient x ?

On considère la représentation graphique de la fonction cube ci-dessous sur laquelle on pourra s'appuyer si nécessaire :



Exercice 15:
Soit f la fonction cube, calculer :

1. $f(4)$.
2. l'image de -4 par f.
3. l'image de -2 par f.
4. $f(-3)$.
5. l'image de 2 par f.
6. $f(3)$.

Exercice 16:

1. Sans effectuer de calcul, comparer $(-5{,}4)^3$ et $(-6{,}3)^3$.
2. Sans effectuer de calcul, comparer $3{,}3^3$ et $3{,}9^3$.
3. Sans effectuer de calcul, comparer $2{,}1^3$ et 2^3.
4. Sans effectuer de calcul, comparer $(-5{,}8)^3$ et $(-5{,}3)^3$.
5. Sans effectuer de calcul, comparer $(-3{,}1)^3$ et $(-2{,}4)^3$.

Exercice 17:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $x^3 = 8$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $x^3 - 5 = -4$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $6x^3 - 5 = 1$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $-9x^3 = 9000$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $x^3 + 1 = 28$
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $7x^3 + 8 = -6992$

Exercice 18:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $-7(x+1)^3 = 189$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $(2x)^3 = 1000$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $(3x-2)^3 + 7 = -118$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $4x^3 = -256$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $(x+5)^3 = 64$
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   $8(9x+1)^3 + 10 = 10$

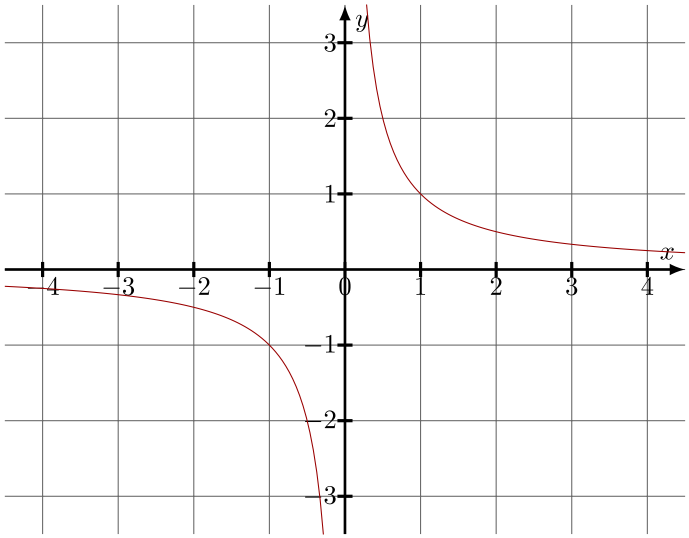
Exercice 19:

1. Si $2 \leq x \leq 6$, à quel intervalle appartient x^3 ?
2. Si $x < 4$, à quel intervalle appartient x^3 ?
3. Si $4 < x \leq 5$, à quel intervalle appartient x^3 ?
4. Si $x \leq 5$, à quel intervalle appartient x^3 ?
5. Si $x \in]0;1] \cup]2;3]$, à quel intervalle appartient x^3 ?

Exercice 20:

1. Si $1 \leq x^3 < 9$, à quel intervalle appartient x ?
2. Si $x^3 \leq 16$, à quel intervalle appartient x ?
3. Si $-2 < x^3 \leq 3$, à quel intervalle appartient x ?
4. Si $x^3 \in]4;9] \cup]16;25[$, à quel intervalle appartient x ?

On considère la représentation graphique de la fonction inverse ci-dessous sur laquelle on pourra s'appuyer si nécessaire :



Exercice 21: Soit f la fonction inverse, calculer :

1. $f(-0{,}0625)$.
2. l'image de $-0{,}0125$ par f.
3. l'image de $-5\,000$ par f.
4. $f(100\,000)$.

Exercice 22:

1. Sans effectuer de calcul, comparer $\dfrac{1}{-4{,}6}$ et $\dfrac{1}{-4{,}1}$.
2. Sans effectuer de calcul, comparer $\dfrac{1}{2{,}9}$ et $\dfrac{1}{2{,}2}$.
3. Sans effectuer de calcul, comparer $\dfrac{1}{7{,}9}$ et $\dfrac{1}{7{,}6}$.
4. Sans effectuer de calcul, comparer $\dfrac{1}{-2{,}9}$ et $\dfrac{1}{-3}$.
5. Sans effectuer de calcul, comparer $\dfrac{1}{-4{,}7}$ et $\dfrac{1}{-3{,}8}$.

Exercice 23:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{1}{x} = -7$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{1}{x} - 3 = 4$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{-2}{x} - 3 = 19$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{-4}{x} = -2$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{-6}{x} + 10 = 88$
6. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{1}{x} = -7$

Exercice 24:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{6}{x+1} = -9$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{1}{x-1} + 8 = 14$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{-3}{x^2} = 2$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{-2}{x^2+1} - 2 = 22$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{1}{x^3} = 11$
6. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$: $\dfrac{1}{x^3-3} + 7 = 0$

Exercice 25:

1. Si $2 \leq x \leq 6$, à quel intervalle appartient $\dfrac{1}{x}$?
2. Si $x < 4$, à quel intervalle appartient $\dfrac{1}{x}$?
3. Si $4 < x \leq 5$, à quel intervalle appartient $\dfrac{1}{x}$?
4. Si $x \leq 5$, à quel intervalle appartient $\dfrac{1}{x}$?
5. Si $x \in]1;4] \cup]6;9]$, à quel intervalle appartient $\dfrac{1}{x}$?

Exercice 26:

1. Si $1 \leq \dfrac{1}{x} < 9$, à quel intervalle appartient x ?
2. Si $\dfrac{1}{x} \leq 16$, à quel intervalle appartient x ?

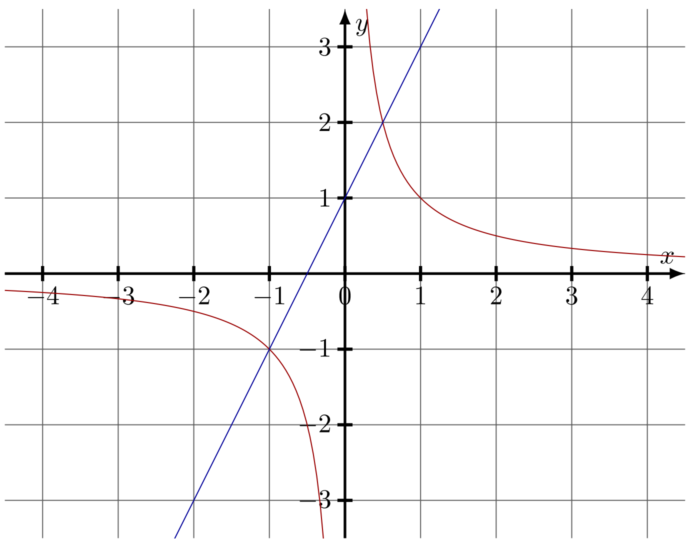
3. Si $-2 < \frac{1}{x} \leq 3$, à quel intervalle appartient x ?

4. Si $\frac{1}{x} \in]-2;-1] \cup]2;3[$, à quel intervalle appartient x ?

Exercice 27:
On considère la fonction m définie par $m(x) = \frac{2x}{x-5}$ pour $x \in \mathcal{D}_m$.

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}_m$ de m
2. Trouver les éventuels antécédents de 6 et de -2 par m

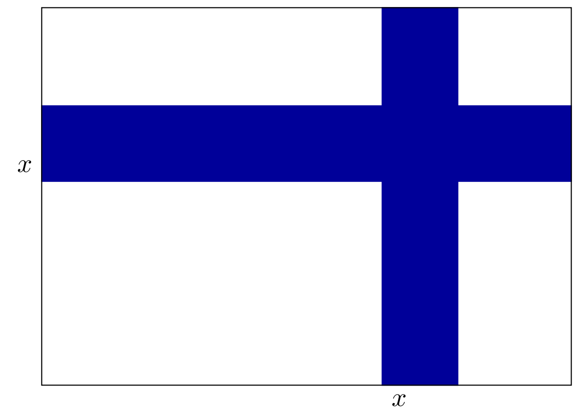
Exercice 28:
On considère les courbes représentatives de la fonction inverse, notée f, et de la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto 2x + 1$. Elles sont tracées dans le repère ci-dessous.



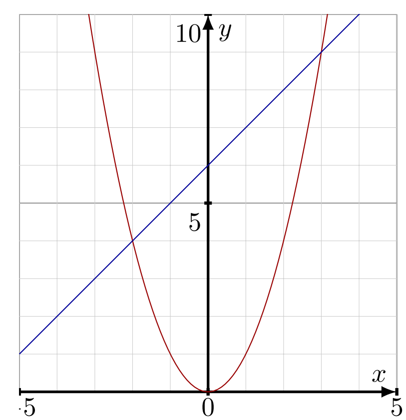
1. Repérer les courbes associées aux deux fonctions.
2. Résoudre graphiquement l'équation $\frac{1}{x} = 2x + 1$.
3. Développer l'expression $(2x-1)(x+1)$. Retrouver algébriquement les résultats précédents

Exercice 29:
On considère un rectangle de longueur 7 et de largeur 5. On trace à l'intérieur de celui-ci une croix de largeur x comme ci-dessous. On s'intéresse à l'aire de la croix bleue.

1. A quel intervalle x appartient-il ?
2. Exprimer l'aire $\mathcal{A}(x)$ de la croix bleue en fonction de x.
3. Avec la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de $\mathcal{A}$ avec un pas de 1



Exercice 30:
On considère les représentations graphiques de la fonction carrée, notée f, et de la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto x + 6$. Elles sont tracées dans le repère ci-dessous.



1. Repérer les courbes associées aux deux fonctions.
2. Résoudre graphiquement l'équation $x^2 = x + 6$.
3. Développer l'expression $(x-3)(x+2)$. Retrouver algébriquement les résultats précédents.

1.3 Approfondissements

Exercice 31:
f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

1. En posant $y = 0$, justifier que $f(0) = 1$.
2. Démontrer que, poyr tout réel x, $f(2x) = (f(x))^2$.
3. Démontrer que, pour tout réel x, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
4. Démontrer que, pour tous réels x, y, $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$.

Exercice 32:
f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant, pour tous réels x et y strictement positifs, $f(x \times y) = f(x) + f(y)$.

1. En posant $y = 1$, justifier que $f(1) = 0$.
2. Démontrer que, poyr tout réel x, $f(x^2) = 2f(x)$.
3. Démontrer que, pour tout réel x, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$.
4. Démontrer que, pour tous réels x, y, $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

Exercice 33:

1. Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que $f(1) = 0$. On dit que 1 est une racine évidente de f.
   (b) On considère trois réels a, b et c. Justifier que :
   $$(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$
   (c) Pour déterminer a, b et c tels que $f(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$, on procède par identification des coefficients en écrivant le système suivant :
   $$\begin{cases} a & = 1 \\ b-a & = 4 \\ c-b & = -3 \\ -c & = -2 \end{cases}$$
   Résoudre ce système puis en déduire une forme factorisée de f.
2. Soit la fonction $g : x \mapsto -x^3 + 2x^2 + x - 2$ définie sur $\mathbb{R}$. En utilisant la méthode précédente, déterminer les réels a, b, c et d tels que :
   $$g(x) = (x-d)(ax^2+bx+c)$$