1 Equations

1.1 Compétences Attendues

- Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème
- Comparer deux quantités en utilisant leur différence ou leur quotient dans le cas positif.
- Résoudre une inéquation du premier degré.
- Modéliser un problème par une inéquation.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Résoudre les équations suivantes

1. $-8z - 13 = -9$
2. $9x = -3$
3. $m + 13 = 1$
4. $5x - 2 = -11x + 1$
5. $-9b - 3 = 0$
6. $\dfrac{-2c}{-5} = 4$

Exercice 2:
Résoudre les équations suivantes

1. $\dfrac{a}{6} = 2$
2. $c + 1 = 5$
3. $3y = -8$
4. $-2y - 2 = 3$
5. $-3y + 12 = -13y + 9$
6. $-6x - 3 = 0$

Exercice 3:
Résoudre les équations suivantes

1. $9(-6x - 3) = -8x - 8$
2. $8 - (-7x + 7) = -5x - 2$
3. $8 - (4x + 9) = -8x - 6$
4. $2(6x - 2) = -x - 8$

Exercice 4:
Résoudre les équations suivantes

1. $3(2x - 6) = 4x + 1$
2. $7 - (-5x - 4) = 3x - 4$
3. $7 - (-5x + 5) = 3x - 9$
4. $7(-x + 1) = -2x - 8$

Exercice 5:
Résoudre les inéquations suivantes.

1. $4x - 8 < 0$
2. $x - 4 < -2$
3. $-12x + 5 \geqslant -4x - 8$

Exercice 6:
Résoudre les inéquations suivantes.

1. $12x < -7$
2. $3x + 2 > -10$
3. $10x - 5 > 6x + 5$

Exercice 7:
Exprimer le prix total P de l'achat en fonction des lettres introduites dans l'énoncé

1. Jean-Claude veut acheter 2 couteaux et 5 fourchettes.
   On note c le prix d'un couteau et f le prix d'une fourchette.
2. Mehdi veut acheter 6 poires et 2 bananes.
   On note p le prix d'une poire et b le prix d'une banane.
3. Jean-Claude veut acheter 3 marteaux et 5 enclumes.
   On note m le prix d'un marteau et e le prix d'une enclume.

Exercice 8:

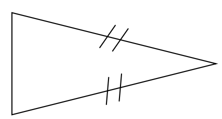
1. Elsa a acheté 3,2 kg de poires avec un billet de 20 euros. Le marchand lui a rendu 5,60 euros.
   Quel est le prix d'un kilogramme de poires ?
2. Une équipe de basket a marqué 108 points lors d'un match. Au cours de ce match, elle a marqué 30 points sur lancers francs.
   L'équipe a marqué 9 paniers à deux points de plus que de paniers à trois points.
   Combien a-t-elle marqué de paniers à trois points ?
3. Un hexagone possède un côté de longueur 5,8 cm et tous ses autres côtés ont même longueur.
   Son périmètre est 43,8 cm.
   Quelle est la longueur des côtés de même longueur ?

Exercice 9:

1. Carine et Karole choisissent un même nombre.
   Carine lui ajoute 7 puis multiplie le résultat par 12 alors que Karole lui ajoute 2 puis multiplie le résultat par 13.
   Carine et Karole obtiennent le même résultat.
   Quel nombre commun ont choisi Carine et Karole ?

2. Dans une salle de spectacle de 2 040 places, le prix d'entrée pour un adulte est 14,90 euros et pour un enfant il est de 11,90 euros.
   Le spectacle de ce soir s'est déroulé devant une salle pleine et la recette est de 27 999 euros.
   Combien d'adultes y avait-il dans la salle ?

3. Un triangle isocèle a pour périmètre 189 mm. Sa base est plus petite que les côtés égaux de 70 mm.
   Quelle est la mesure de sa base ?



Exercice 10:

1. On donne les deux programmes de calcul suivants :
   Programme 1 :
   - Choisir un nombre
   - Ajouter 3
   - Prendre le carré du résultat

   Programme 2 :
   - Choisir un nombre
   - Multiplier par 6
   - Ajouter 37

   Déterminer les nombres éventuels que l'on peut entrer dans ces deux programmes pour qu'au final ils donnent le même résultat.

2. 52 élèves d'un lycée font une sortie théâtre. Ils sont accompagnés de 6 adultes.
   Les élèves bénéficient d'un tarif réduit. Ils paient 4 euros de moins que les adultes.
   Le coût total de cette sortie (élèves + adultes) est de 1010 euros.
   En notant x le tarif pour un adulte, modéliser la situation à l'aide d'une équation puis déterminer le prix de la place pour un adulte.

Exercice 11:

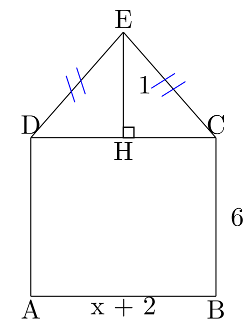
1. Un rectangle a pour largeur 2 cm et pour longueur x cm.
   En ajoutant 10 cm à la longueur de ce rectangle, on obtient un nouveau rectangle dont l'aire est 86 cm^2.
   Quelle est la longueur x du rectangle initial ?
   On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier le cas échéant.

2. Un triangle MNP est rectangle en M. On a $MP = 11$ cm et $MN = x$ cm.
   L'hypoténuse du triangle MNP mesure 2 cm de plus que le côté $[MN]$.
   Déterminer la valeur de x sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier le cas échéant.

Exercice 12:

1. La figure ci-contre (qui n'est pas à l'échelle) est composée d'un rectangle $ABCD$ et d'un triangle isocèle DEC.
   L'unité est le mètre.

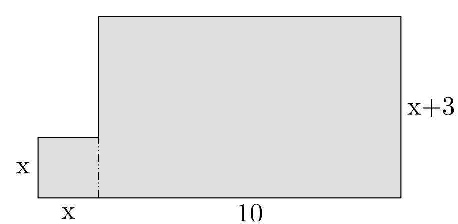
   Sachant que l'aire de cette figure est 143 m^2 et en utilisant les données du graphique, déterminer la valeur exacte de x.



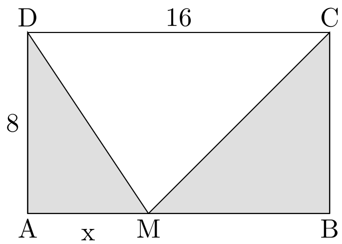
2. $[AB]$ est un segment de longueur 26 et M est un point de ce segment.
   Du même côté du segment $[AB]$, on trace le triangle équilatéral AME et le carré $MBCD$.
   On pose $AM = x$.
   Déterminer la valeur de x pour que le périmètre du triangle AME soit égal à celui du carré $MBCD$.

Exercice 13:

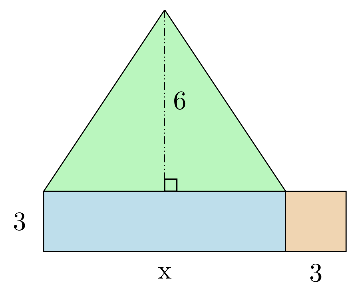
1. On considère la figure ci-dessous (l'unité est le centimètre).
   Quelles sont les valeurs possibles de x pour que le périmètre de la figure soit supérieur à 58 cm.



2. Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AD = 8$ et $DC = 16$.
   M est un point du segment $[AB]$. On note $AM = x$.
   Pour quelles valeurs de x l'aire du triangle AMD est-elle au plus égale au dixième de l'aire du triangle CMB ?



3. On considère la figure ci-dessous sur laquelle les longueurs sont en cm.
   Quelles sont les valeurs possibles de x pour que l'aire de cette figure dépasse 56 cm^2 ?
   Résoudre ce problème en le modélisant par une inéquation.



Exercice 14:

1. À la mi-journée la recette d'un musée s'élève à 592 euros pour 148 entrées. Le prix de l'entrée est unique.
   Quel doit être le minimum d'entrées en deuxième partie de journée pour que la recette de la journée soit au moins égale à 3 510 euros ?
   Résoudre ce problème en écrivant et résolvant une inéquation modélisant la situation.

2. On donne les deux programmes de calcul suivants :
   Programme 1 :
   - Choisir un nombre
   - Ajouter -2
   - Multiplier le résultat par le nombre choisi au départ

   Programme 2 :
   - Choisir un nombre
   - Ajouter 9
   - Prendre le carré du résultat

   Déterminer les nombres que l'on doit entrer dans ces deux programmes pour qu'au final le résultat obtenu avec le programme 1 soit strictement supérieur à celui obtenu avec le programme 2.

Exercice 15:

1. Pour la location mensuelle d'un véhicule, une entreprise propose le tarif suivant: Forfait de 117 euros quelque soit le nombre de km parcourus, puis un supplément par kilomètre parcouru de 0,2 euros.

   Léa loue une voiture à cette société. Elle a un budget de 260 euros et ne veut pas le dépasser.
   Quel est le nombre maximum de km (arrondi à l'unité si besoin) qu'elle pourra parcourir sans dépasser son budget ?

2. Une société de location de véhicules particulièrs propose deux tarifs :
   • Tarif A : un forfait de 27 euros et 0,27 euros par km parcouru ;
   • Tarif B : un forfait de 35 euros et 0,14 euros par km parcouru ;
   À partir de combien de km (arrondi à l'unité), le tarif B est-il plus intéressant que le tarif A ?

Exercice 16:
Résoudre les équations suivantes.

1. $(-9x-9)(-3x+1)=0$
2. $\left(-3x-\dfrac{1}{3}\right)\left(-4x+\dfrac{3}{7}\right)=0$
3. $\left(\dfrac{1}{7}x+9\right)\left(\dfrac{-5}{7}x+2\right)=0$

Exercice 17:
Résoudre les équations suivantes.

1. $\left(\dfrac{-1}{5}x+8\right)\left(\dfrac{-1}{7}x+2\right)=0$
2. $(x-8)(-2x+1)=0$
3. $\left(5x-\dfrac{1}{7}\right)\left(6x+\dfrac{2}{7}\right)=0$

Exercice 18:
Préciser les valeurs interdites éventuelles, puis résoudre les équations :

1. $\dfrac{4x+3}{7x-4}=0$
2. $\dfrac{9+x}{-x-3}=6$
3. $\dfrac{2}{-2x-4}=\dfrac{1}{-5x-1}$

Exercice 19:
Résoudre les inéquations suivantes.

1. $(9x-11)(13x+6)(-7x+10)>0$
2. $(-8x+13)(6x+12)\leqslant 0$
3. $(x-2)(x+11)(x-11)<0$

Exercice 20:
On veut construire une boite en bois avec couvercle ayant une base carrée de côté x et une hauteur égale à 2.

1. Montrer que la surface extérieure de la bvoite est donnée en fonction de x par la formule $S(x)=2(x+2)^2-8$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de x la boite a t-elle une surface extérieure égale à 72 ?

Exercice 21:
Soit f,g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f: x\mapsto 2x^2+4x-6$
- $g: x\mapsto 2(x+1)^2-8$
- $h: x\mapsto 2(x-1)(x+3)$

1. Montrer que f,g et h sont égales sur $\mathbb{R}$.
2. Réspondre aux questions suivantes en choississant à chaque fois la forme la plus adaptée.
   (a) Chercher les éventuels antécédents de 0 et de -6.
   (b) Calculer les images de 0, de 1 et de $\sqrt{3}-1$
   (c) Trouver les abscisses des points de f d'ordonnée égale à 24 appartenant à la courbe de f.

Exercice 22:
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f: x\mapsto (x^2-1)(x+5)$.

1. Développer $f(x)$.
2. En utilisant la forme la plus adaptée, répondre aux questions suivantes.
   (a) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.
   (b) Résoudre l'équation $f(x)=x+5$

Exercice 23:
On considère la fonction A définie sur $\mathbb{R}$ par $A: x\mapsto (x+2)^2-9$.

1. Développer $A(x)$.
2. Déterminer la forme factorisée de $A(x)$.
3. Utiliser la forme la plus adéquate pour répondre aux questions suivantes.
   (a) Calculer $A(3)$ et $A(\sqrt{3}-2)$.
   (b) Résoudre l'équation $A(x)=0$.
   (c) Déterminer les antécédents de -5 par A.

Exercice 24:
On considère trois fonctions A, B et C définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $A: x\mapsto 4x^2-100$
- $B: x\mapsto (5+x)(1-2x)+(5+x)(1-3x)$
- $C: x\mapsto (x-3)^2$

1. Factoriser $A(x)$.
2. Factoriser $B(x)$.
3. Développer $C(x)$.
4. Résoudre $A(x)=0$ puis $A(x)=69$.
5. Résoudre $B(x)=0$.
6. Existe-t-il une valeur de x pour laquelle la valeur de $A(x)$ est égale à quatre fois celle de $C(x)$? Si oui, la ou les donner.

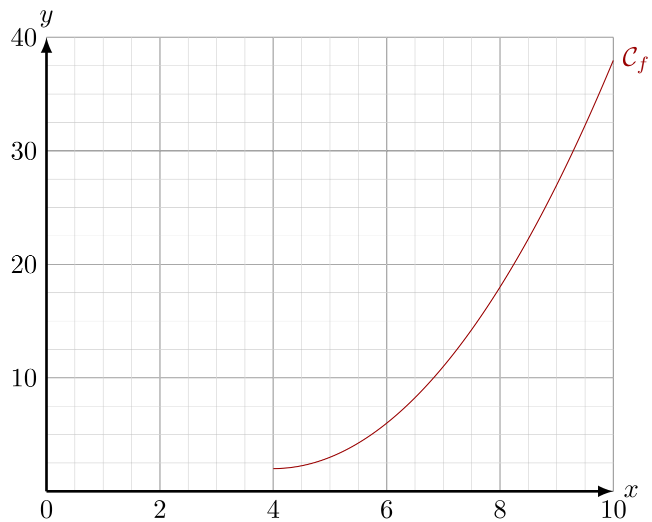
Exercice 25:
Un jardinier vend des paniers bio de légumes frais. Le coût de production de x paniers bio est donné par la fonction définie sur $[0;30]$ par :

$$C: x\mapsto 100+7x$$

$C(0)=100$: Cela représente les coûts fixes de production.

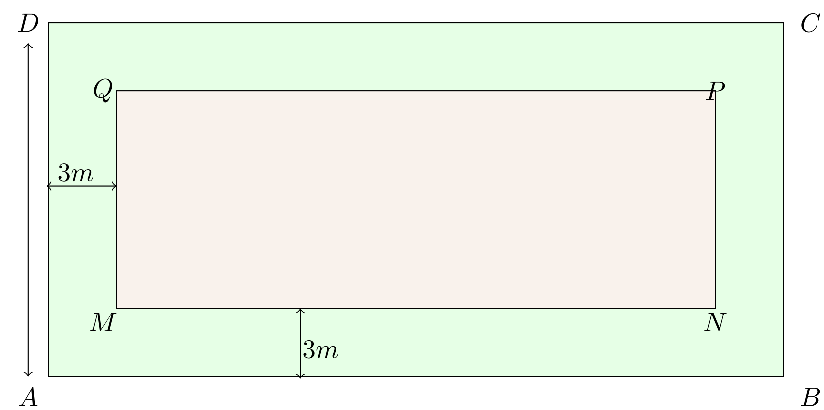
1. Quel est le coût de production de 15 paniers ?
2. Combien coûte un pa,nier en moyenne, au jardinier, lorsqu'il en produit 15 ?
3. On appelle coût moyen unitaire de production pour une production égale à x le résultat $\dfrac{C(x)}{x}$ pour $x > 0$.
   On notera $C_m(x)$ ($x \in]0; +\infty[$) le coût moyen unitaire pour x paniers produits.
   Exprimer $C_m(x)$ en fonction de x.
4. Trouver la production x pour laquelle un panier coûte en moyenne 11 euros au jardinier.

Exercice 26:
Une entreprise fabrique des pièces mécaniques. On note x le nombre de dizaines de pièces fabriquées au cours d'une journée. Le coût de production, en euros, de x dizaines de pièces est $f(x)$. La partie de la courbe représentative de la fonction f l'intervalle $[4; 10]$ est donnée dans le repère ci-dessous.



1. ***Lecture graphique***
   (a) A l'aide du graphique, déterminer le coût de production de 50 pièces
   (b) Chaque pièce est vendue 0,30 euro. On not $R(x)$ la recette de l'entreprise lorsqu'elle produit x dizaines de pièces. Expliquer pourquoi $R(x) = 3x$
   (c) Le bénéfice réalisé par l'entreprise, en fonction du nombre x de dizaines de pièces vendues, est la différence entre la recette et le coût de production. On note $B(x)$ ce bénéfice. A l'aide du graphique et de la règle (sans faire aucun tracé), déterminer à quel intervalle doit appartenir x pour que l'entreprise réalise un bénéfice
2. ***Etude algébrique***
   On suppose que la fonction f est définie sur l'intervalle $[4; 10]$ par :
   $$f(x) = x^2 - 8x + 18$$
   (a) On rappelle que, lorsque l'entreprise produit x dizaines de pièces, sa recette est $R(x) = 3x$.
   Vérifier que le bénéfice de l'entreprise est alors :
   $$B(x) = -x^2 + 11x - 18$$
   (b) Montrer que :
   $$B(x) = (2 - x)(x - 9)$$
   (c) Retrouver le résultat de la question 1.(c) par le calcul.

Exercice 27:
Khadija spuhaite faire aménager un potager dans son jardin. Elle souhaite que le potager soit entouré d'un chemin sur une largeur de $3m$ et que la surface totale (potager et chemin) soit un rectangle d'aire $300m^2$.



1. ***Aménagement du potager***
   On pose $AD = x$
   (a) Exprimer MQ en fonction de x.
   (b) i. Expliquer pourquoi $AB = \dfrac{300}{x}$.
   ii. En déduire MN en fonction de x.

(c) On note S la fonction qui à la longueur $x = AD$ (en mètres) associe l'aire du potager, donc du rectangle $MNPQ$ (en m^2).
Montrer que :

$$S(x) = 336 - 6x - \frac{1800}{x}$$

Dans la suite, on admet que S est définie sur l'intervalle $[6; 50]$.

2. ***Conditions pour un grand potager***
On cherche à déterminer comment choisir x pour que l'aire du potager soit supérieure à $63m^2$.

(a) Montrer que :

$$S(x) > 63 \iff \frac{-6x^2 + 273x - 1800}{x} > 0$$

(b) Montrer que :

$$-6x^2 + 273x - 1800 = -3(x - 8)(2x - 75)$$

(c) En déduire le tableau de signe de $x \mapsto \dfrac{-6x^2 + 273x - 1800}{x}$.

(d) Conclure.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 28:
On considère l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$ où a, b, c et d sont des réels non nuls. Ecrire un programme Python qui demande à un utilisateur les valeurs de a, b, c et d de l'équation et qui renvoie les solutions de cette équation.

1.4 Approfondissements

Exercice 29:
On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^4 + x^2 = 6$.

1. Développer $(y - 2)(y + 3)$.
2. On pose $y = x^2$ dans l'équation (E). Transformer l'équation (E) d'inconnue x en une équation d'inconnue y.
3. Trouver les valeurs possibles de y.
4. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 30:

1. (a) Compléter les pointillés avec un nombre réel : $x^2 + 4x - 12 = (x + 2)^2 - .....$
   (b) Factoriser l'expression précédente.
   (c) En déduire les solutions de $x^2 + 4x - 12 = 0$.
2. De la même façon, résoudre $x^2 - 12x + 20 = 0$.

   (a) $x^2 - 12x - 20 = 0$

   (b) $x^2 - 2x + 8 = 0$