1 Notions de vecteurs, coordonnées, somme

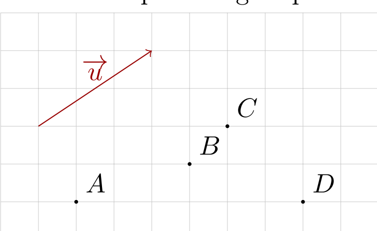
1.1 Compétences Attendues

- Représenter géométriquement des vecteurs
- Construire géométriquement la somme de deux vecteurs
- Utiliser et représenter la multiplication d'un vecteur par un réel
- Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées.
- Lire les coordonnées d'un vecteur.
- Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Calculer la distance entre deux points.

1.2 Exercices

Exercice 1:

On considère la figure ci-contre où chaque carreau du quadrillage a pour côté 1.

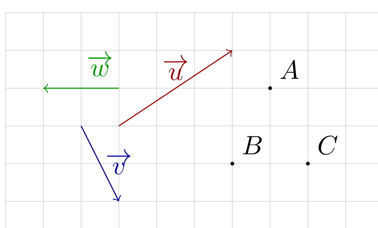


1. Reproduire la figure
2. Construire le vecteur $\vec{u}$ d'origine A, ayant pour direction la droite (AD), pour sens A vers D et pour norme 4
3. Construire le vecteur $\vec{v}$ d'origine D, ayant pour direction la droite (BC), pour sens B vers C et pour norme 2
4. Construire le vecteur $\vec{z}$ d'origine C, égal à $\vec{u}$
5. Construire le vecteur $\vec{t}$ d'origine A, égal à $\vec{u}$

Exercice 2:

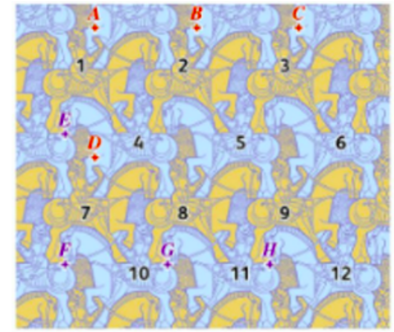
A partir de la figure ci-contre :

1. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u}$
2. Construire le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \vec{v}$



Exercice 3:

Le pavage ci-dessous, réalisé dans l'esprit d'Escher, représente des cavalières tournées vers la droite (en orange) ou vers la gauche (en bleu). Les cavalières représentées "entières" sont numérotées de 1 à 12 et huit points ont été placés sur la figure

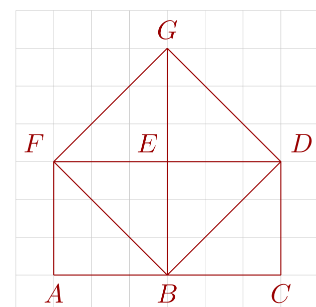


1. Quelle est l'image de la cavalière :
   (a) 7 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$
   (b) 8 par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$
   (c) 2 par la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$
2. Quelle est la translation qui transforme :
   (a) La cavalière 5 en la cavalière 4
   (b) La cavalière 10 en la cavalière 12
   (c) La cavalière 6 en la cavalière 11

Exercice 4:

A l'aide de la figure ci-contre, citer :

1. Trois paires de vecteurs égaux
2. Trois vecteurs ayant la même direction
3. Quatre vecteurs ayant la même norme
4. Deux vecteurs ayant la même direction, des sens contraires et des normes différentes
5. Quatre vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{ED}$

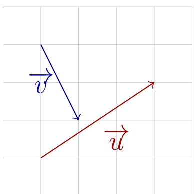


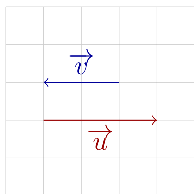
Exercice 5:
Soit ABCD un carré de centre O et de côté 2

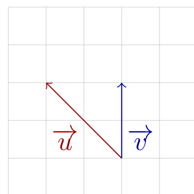
1. Construire le vecteur $\vec{u}$ ayant même direction et même sens que $\overrightarrow{AB}$, pour norme 4 et pour origine C

2. Construire le vecteur $\overrightarrow{v}$ ayant même direction que $\overrightarrow{DO}$, pour sens de O vers D, pour norme 2 et pour extrémité C

Exercice 6:
Dans chacun des cas, reproduire la figure en respectant le quadrillage et construire le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

1. 

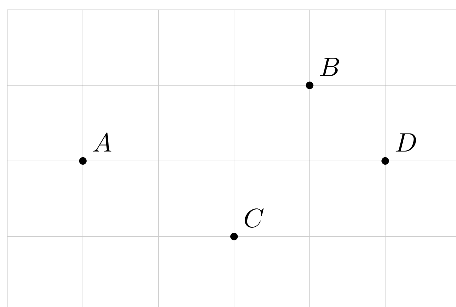
2. 

3. 

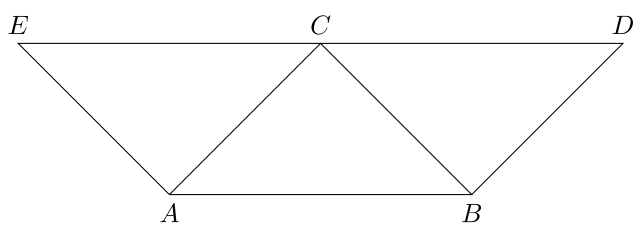
Exercice 7:

Reproduire la figure ci-contre et construire les points E,F,G et H tels que :

1. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$
3. $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DC}$
4. $\overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$



Exercice 8:
$ABDC$ et $ABCE$ sont des parallélogrammes. Compléter les égalités :



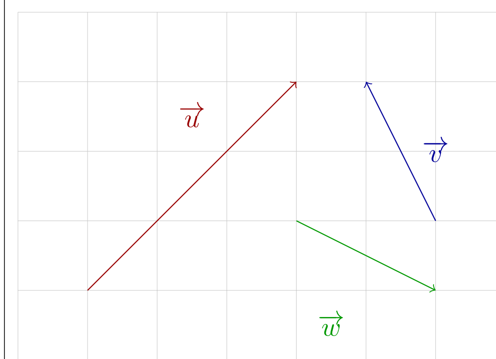
1. $\overrightarrow{AB} = ... = ...$
2. $\overrightarrow{AE} = ...$
3. $\overrightarrow{AC} = ...$
4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = ...$
5. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = ...$
6. $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{A...} = \overrightarrow{...B}$
7. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{...A} = \overrightarrow{D...}$
8. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = ...$
9. $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = ...$
10. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} = ...$

Exercice 9:
En utilisant la relation de Chasles,

1. Simplifier l'écriture des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$
2. Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

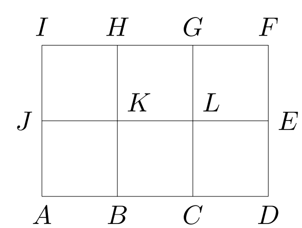
Exercice 10:

Soient $\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs.



1. Construire les vecteurs $-\overrightarrow{u}$; $-\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.
2. Construire un représentant des vecteurs suivants.
   (a) $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$
   (b) $\overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$
   (c) $\overrightarrow{z_3} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$
   (d) $\overrightarrow{z_4} = -\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$
   (e) $\overrightarrow{z_5} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$
   (f) $\overrightarrow{z_6} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$
   (g) $\overrightarrow{z_7} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$

Exercice 11:
La figure ci-dessous est formée de six carrés. Compléter les pointillés avec des nombres réels.



1. (a) $\overrightarrow{IF} = ...\overrightarrow{AB}$
   (b) $\overrightarrow{KL} = ...\overrightarrow{DB}$
   (c) $\overrightarrow{FD} = ...\overrightarrow{AJ}$
   (d) $\overrightarrow{GF} = ...\overrightarrow{BA}$
   (e) $\overrightarrow{DA} = ...\overrightarrow{KE}$
   (f) $\overrightarrow{JE} = ...\overrightarrow{IG}$

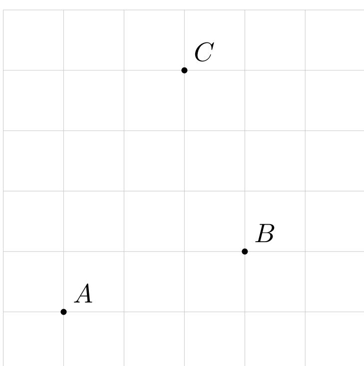
2. (a) $\overrightarrow{KF} = ...\overrightarrow{AB} + ...\overrightarrow{AJ}$
   (b) $\overrightarrow{ID} = ...\overrightarrow{GL} + ...\overrightarrow{GH}$
   (c) $\overrightarrow{CJ} = ...\overrightarrow{LC} + ...\overrightarrow{EL}$
   (d) $\overrightarrow{JF} = ...\overrightarrow{HK} + ...\overrightarrow{CD}$

Exercice 12:
On considère un segment $[AB]$ de longueur 6. Construire les points C,D,E,F,G et H tels que :

1. $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{BD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AC}$
4. $\overrightarrow{DF} = \frac{7}{5}\overrightarrow{DC}$
5. $\overrightarrow{GA} = \frac{6}{5}\overrightarrow{EA}$
6. $\overrightarrow{HD} = \frac{7}{2}\overrightarrow{CB}$

Exercice 13:

1. Reproduire la figure ci-dessous en respectant le quadrillage.



2. Construire les points M,N,P et Q tels que :
   (a) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
   (b) $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$
   (c) $\overrightarrow{CP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}$
   (d) $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PB}$

Exercice 14:
Soit ABC un triangle. Placer les points D,E et F tels que :

- $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA}$
- $3\overrightarrow{FC} - 2\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{0}$

Exercice 15:
Soit $EFGH$ un parallélogramme de centre O.

1. Construire les points S et T vérifiant $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH}$
2. Démontrer que $\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{0}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 16:

1. Construire un triangle ABC.
2. Placer les points M,P et N tels que :
   (a) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
   (b) $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MA}$
3. Prouver que $\overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{PB}$.

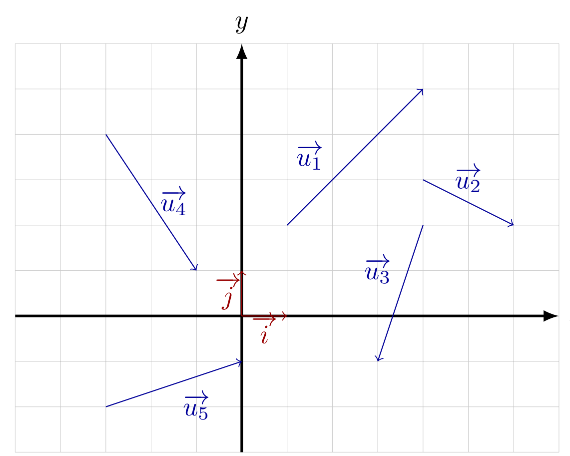
Exercice 17:
Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne deux points $A(3; 2)$ et $B(-4; 2)$.

1. Faire une figure
2. Représenter
   (a) un vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ d'origine O.
   (b) un vecteur $\overrightarrow{v}$ d'origine A et de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
3. Placer les points C et D tels que $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 18:
Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, représenter les vecteurs :

1. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. $\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

Exercice 19:
Lire les coordonnées de tous les vecteurs de la figure ci-dessous.



Exercice 20:
Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

1. $\vec{u} + \vec{v}$
2. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
3. $2\vec{u}$
4. $3\vec{u} - 5\vec{v}$

Exercice 21:
Soient $A(-1;3)$; $B(5;1)$ et $C(3;5)$

1. Calculer les coordonnées de vecteurs suivants.
   (a) $\overrightarrow{AB}$
   (b) $\overrightarrow{AC}$
   (c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
2. Soit $E(x_E; y_E)$ le point tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
   (a) Exprimer en fonction de x_E et y_E les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AE}$
   (b) En déduire les coordonnées de E

Exercice 22:
On considère le point $A(1;2)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer l'ordonnée du point M d'abscisse 7 tel que $AM = 10$

Exercice 23:
Le plan est muni d'un repère $(0, I, J)$. On considère les points $A(-1;2)$;$B(-2;-2)$ et $C(2;3)$

1. Tracer un repère orthonormé et placer les points.
2. (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$
   (b) En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
   (c) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ puis calculer ses coordonnées.
   (d) Vérifier la cohérence de ces résultats
3. (a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
   (b) Calculer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Exercice 24:
Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On considère les points $A(-2, 2)$; $B(2;3)$; $C(1;1)$ et $D(4;-5)$

1. Tracer un repère orthonormé et placer les points
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$
3. En déduire les coordonnées des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{AB}$; $5\overrightarrow{CD}$: $-3\overrightarrow{AB}$; $\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
4. Calculer les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB}$
5. Calculer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$
6. Calculer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{GB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

Exercice 25:
On considère le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Pour chaque question, calculer la longueur AB.

1. $A(0;2)$ et $B(5;6)$
2. $A(-2;8)$ et $B(3;-3)$

Exercice 26:
On considère le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) et les points $A(-2;1)$; $B(4;-3)$ et $C(-1;-4)$

1. Placer les points dans le repère
2. (a) Quelle semble être la nature du triangle ABC ?
   (b) Calculer les longueurs AB, AC et BC
   (c) Démontrer la conjecture précédente.

Exercice 27:
On considère le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) et les points $D(-3;0)$; $E(3;0)$ et $F(0;3\sqrt{3})$. Quelle est la nature du triangle DEF?

Exercice 28:
On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(0, I, J)$. Dans chaque cas, indiquer la nature du triangle ABC.

1. $A(1;4)$; $B(2;8)$ et $C(6;7)$
2. $A(2;-1)$; $B(4;-4)$ et $C(-1;1)$
3. $A(2;5)$; $B(3;-7)$ et $C(-2;3)$

Exercice 29:
Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(3;2)$; $B(-1;5)$; $C(-4;1)$; $D(0;-2)$ et $E(-3;-2)$. Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse.

1. Le point B appartient au cercle de centre A et de rayon 5
2. $AC = 5\sqrt{2}$
3. Le quadrilatère ABCD est un carré
4. Le point E appartient à la médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 30:
Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, placer les points $A(-4;2)$; $B(3;4)$; $C(4;-1)$; $D(-3;-1)$; $E(1;1)$; $F(3;5)$; $G(-3;2)$ et $H(-5;-2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$
2. En déduire la nature du quadrilatère EFGH.

Exercice 31:
On considère les points $A(1;4)$, $B(4;6)$ et $C(2;3)$.

1. Quelles sont les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme?
2. Prouver que $ABCD$ est aussi un losange.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 32:
On donne ci-dessous un algorithme incomplet rédigé en Python afin de savoir si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.

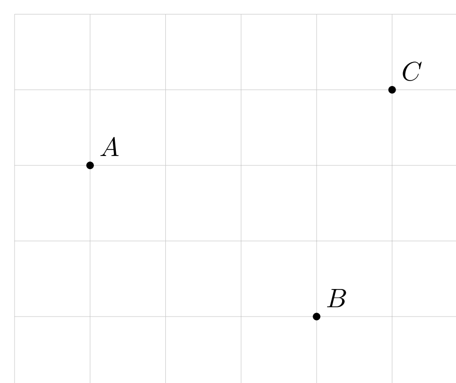
```
1  def vecteur(xA,yA,xB,yB):
2      x=xB-xA
3      y=yB-yA
4      return (x,y)
5
6  def egalite(xA,yA,xB,yB,xC,yC,xD,yD):
7      (x1,y1)=vecteur(xA,yA,xB,yB)
8      (x2,y2)=vecteur(xC,yC,xD,yD)
9      if (...==...) and (...==...):
10         print("vecteurs egaux")
11     else:
12         print("vecteurs non egaux")
```

1. (a) Quel est le rôle de la fonction `vecteur` ?
   (b) Expliquer les lignes 7 et 8.
   (c) Compléter les pointillés de la ligne 9.
   (d) Programmer cet algorithme sous Python.
2. A l'aide de l'algorithme, préciser dans chacun des cas suivants si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.
   (a) $A(2;10)$, $B(6;3)$, $C(-2;3)$, $D(2;-5)$
   (b) $A(42;89)$, $B(28;-67)$, $C(45;-98)$, $D(31;-254)$
3. Soient $R(-10;10)$, $S(6;15)$, $T(8;-2)$ et $U(24;4)$. A l'aide de l'algorithme, justifier que $RSUT$ est un parallélogramme.
4. Dans chacun des cas suivants, en utilisant l'algorithme, préciser si le point M est le milieu du segment $[AB]$.
   (a) $A(2;1)$, $B(16;5)$, $M(9;3)$
   (b) $A(-1,5;3,8)$, $B(1,9;-5,2)$, $M(0,2;-0,6)$

1.4 Approfondissements

Exercice 33:

1. ***Partie A: Cas particuliers***
   Soient trois points A, B et C. On considère les homothéties h_1 et h_2 de centre A et de rapports respectifs $k_1 = 2$ et $k_2 = -3$.



   (a) Reproduire la figure en respectant le quadrillage.

(b) i. Construire les images respectives B_1 et C_1 des points B et C par l'homothétie h_1.
  ii. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB_1}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
  iii. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AC_1}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

(c) i. Construire les images respectives B_2 et C_2 des points B et C par l'homothétie h_2.
  ii. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
  iii. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AC_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

(d) Soit M un point quelconque. On note M_1 l'image de M par l'homothétie h_1 et M_2 l'image de M par l'homothétie h_2.
  i. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM_1}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$.
  ii. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$.

2. ***Partie B: Cas général***
Soit h une homothétie de centre A et de rapport $k \neq 0$. Pour tout point M du plan, on note M' l'image de M par l'homothétie h. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AM}$.