1 Colinéarité de vecteurs, déterminant

1.1 Compétences Attendues

- Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité des vecteurs.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Pour chaque couple de vecteurs ci-dessous :

- Calculer leur déterminant
- Dire s'ils sont colinéaires
- S'ils sont colinéaires, trouver un coefficient de colinéarité

1. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{s} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{t} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4.5 \end{pmatrix}$
4. $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix}$
5. $\overrightarrow{s} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{-\frac{3}{7}} \end{pmatrix}$
6. $\overrightarrow{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{-\frac{3}{7}} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{t} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 2:
Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 17,5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1,6 \\ 4 \end{pmatrix}$ trois vecteurs. Examiner la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$

Exercice 3:
Soient les points $A(2;3)$; $B(23;6)$; $C(-10;-5)$; $D(4;-3)$; $E(8;19)$; $F(17;37)$; $G(11;25)$ et $H(-8;-14)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$
2. (a) Les droites (AB) et (DC) sont-elles parallèles ?
   (b) Les droites (BC) et (AD) sont-elles parallèles ?
3. (a) Les points E,F et G sont-ils alignés ?
   (b) Les points E,F et H sont-ils alignés ?

Exercice 4:
Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 25 \\ t \end{pmatrix}$ deux vecteurs colinéaires. Calculer la valeur de t.

Exercice 5:
Dans chaque cas, dire si les droites (AB) et (CD) sont parallèles en justifiant par un calcul de déterminant.

1. $A(-2;1)$, $B(3;4)$, $C(2;2)$ et $D(5;4)$
2. $A(2;2)$, $B(5;4)$, $C(1;4)$ et $D(-2;2)$
3. $A(3;4)$, $B(5;0)$, $C(0;5)$ et $D(3;0)$

Exercice 6:
Dans chaque cas, dire si les trois points sont alignés en justifiant par un calcul de déterminant.

1. $A(-4;3)$, $B(2;3)$ et $C(6;3)$
2. $A(2;5)$, $B(-4;-3)$ et $C(5;9)$
3. $A(-2;1)$, $B(3;4)$ et $C(5;5)$

Exercice 7:
On considère les points $A(3;7)$; $B(-3;3)$ et $C(7;-5)$. On considère les points :

- M,N et P les milieux respectifs de $[BC]$; $[AC]$ et $[AB]$
- S symétrique de M par rapport à B
- G et H définis par $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

1. Faire une figure
2. (a) Exprimer $\overrightarrow{BM}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$
   (b) Calculer les coordonnées du point M
   (c) Calculer de la même manière les coordonnées de N et P
3. (a) Exprimer $\overrightarrow{MS}$ en fonction de $\overrightarrow{MB}$
   (b) Calculer les coordonnées de S
4. Calculer les coordonnées de G et H
5. Montrer que les droites (MH) et (SP) sont parallèles
6. Montrer que les points S,G et N sont alignés

Exercice 8:
Soit ABC un triangle où $A(11;2)$; $B(3;-2)$ et $C(1;6)$. M et N sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AC]$. Soit G défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

1. (a) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
   (b) Calculer les coordonnées du point G
2. (a) A l'aide d'une égalité vectorielle, calculer les coordonnées du point M
   (b) Calculer de la même manière les coordonnées de N
3. (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont colinéaires. Que peut-on déduire ?
   (b) Montrer que les points C,G et M sont alignés
4. Que représente le point G pour le triangle ABC ?

Exercice 9:
Soit ABC un triangle du plan. On se place dans le repère (A, B, C).

1. On note A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C' le milieu de $[AB]$.
   (a) Calculer les coordonnées des points A', B' et C' dans le repère (A, B, C)
   (b) En utilisant le quadrillage, placer ces trois points.
2. (a) Calculer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$
   (b) Que dire des points A,G et A' ?
   (c) Démontrer que les points B,G et B' sont alignés.
   (d) Démontrer que les points C,G et C' sont alignés.
   (e) Construire alors le point G
3. On considère les points I et J tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$
   (a) Calculer les coordonnées du point I dans le repère (A, B, C)
   (b) Calculer les coordonnées du point J dans le repère (A, B, C)
   (c) En utilisant le quadrillage, placer les points I et J.
4. Les droites (IJ) et (BC) sont-elles parallèles ?

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 10:

1. Proposer un algorithme vérifiant si les droites (AB) et (CD) sont parallèles à partir des coordonnées des points A, B, C et D entrées par l'utilisateur.
2. Proposer un algorithme qui vérifie si les points A, B et C sont alignés à partir de leurs coordonnées entrées par l'utilisateur.

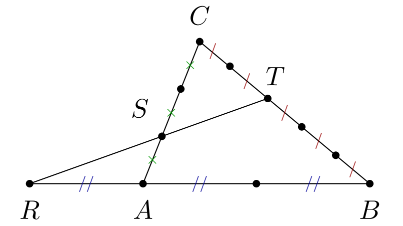
1.4 Approfondissements

Exercice 11:

On considère le triangle ABC. R est un point de (AB), S un point de (AC) et T un point de (BC).
A partir de la figure, déterminer les valeurs des réels α, β et γ tels que :

- $\overrightarrow{AR} = \alpha\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AS} = \beta\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BT} = \gamma\overrightarrow{BC}$

Dans la suite, on se propose de démontrer que les points R, S et T sont alignés en utilisant deux méthodes.



1. ***Méthode géométrique***
   (a) Montrer que :
      i. $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
      ii. $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$
   (b) En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{RT}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Vérifier que $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{RT}$. Conclure.
2. ***Méthode analytique***
   On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   (a) Donner les coordonnées des points suivants : A, B, C, S et R.
   (b) Calculer les coordonnées du point T.
   (c) Montrer que $\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$.
   (d) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SR}$ sont colinéaires.
   (e) Conclure