1 Arithmétique

1.1 Compétences Attendues

- Modéliser et résoudre des problèmes mobilisant les notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair, de nombre premier.
- Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible

1.2 Exercices

Exercice 1:
Démontrer que :

1. Le produit d'un entier par un entier pair est pair.
2. Le produit de deux entiers impairs est impair.
3. Le produit de deux entiers consécutifs est pair.
4. La somme de deux entiers consécutifs est impaire.

Exercice 2:

1. Etudier la parité des nombres suivants sans effectuer de calcul :

   (a) 15^2 | (b) 31^2 | (c) 46^2 | (d) 25×13 | (e) 24×17

2. Verifier en effectuant les produits à l'aide de la calculatrice.

Exercice 3:

1. Démontrer que :
   (a) Le cube d'un entier pair est pair.
   (b) Le cube d'un entier impair est impair.
2. Préciser la parité des nombres suivants sans effectuer de calcul :

   (a) 14^3 | (b) 15^3 | (c) 101^3 | (d) $1024^3 \times 5^3$

Exercice 4:
Soit un entier n.

1. On suppose que n est pair. Démontrer que son carré est divisible par 4.
2. On suppose que n est impair. Démontrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 est égal à 1.

Exercice 5:
Soient a et b deux entiers relatifs.

1. On suppose que a est pair et b est impair. Préciser la parité des nombres suivants:

   (a) $2a + 3b$ | (b) $a^2 - b^2$ | (c) $9a + 4b$

2. Même question dans le cas où a et b sont impairs.

Exercice 6:
Soit un entier naturel N impair. On cherche une condition nécessaire pour qu'on puisse écrire $N = a^2 + b^2$ avec $a, b \in \mathbb{N}$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

a	b	a^2	b^2	$a^2 + b^2$
Pair	Pair			
Pair	Impair			
Impair	Pair			
Impair	Impair			

2. On suppose qu'on peut écrire $N = a^2 + b^2$.
   (a) En utilisant la question **1**, justifier que les entiers a et b n'ont pas la même parité
   (b) On pose $a = 2u$ et $b = 2v + 1$ avec $u, v \in \mathbb{N}$. Démontrer que N est de la forme $4k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$
3. Les entiers impairs de la forme $4k + 1$ peuvent-ils tous s'écrire comme la somme de deux carrés ?

Exercice 7:
Compléter le tableau en mettant oui ou non dans chaque case.

... est divisible	par 2	par 3	par 5	par 9
110 246				
21 883				
921 345				
4 101 390				
201 477				
1 148 166				
524 763				

Exercice 8:
Parmi les nombres ci-dessous, indiquer s'il est premier ou donner sa décomposition en produit de facteurs premiers.

1. 32 | 2. 59 | 3. 115 | 4. 187

Exercice 9:
Parmi les nombres ci-dessous, indiquer s'il est premier ou donner sa décomposition en produit de facteurs premiers.

1. 227 | 2. 303 | 3. 503 | 4. 667

Exercice 10:

1. On a 82993=11×7544 + 9
   Écrire le quotient et le reste de la division euclidienne de 82993 par 11.
2. Les trois divisions euclidiennes suivantes sont exactes :

$$5032 = 74\times68 + 0$$
$$5032 = 73\times68 + 68$$
$$5032 = 75\times67 + 7$$

   Sans calculer, dire si les nombres 74; 73; 75 sont des diviseurs de 5032. Justifier.
3. Après avoir testé avec la calculatrice, compléter chaque phrase avec "est un diviseur de" ou "est un multiple de" ou "n'est ni un diviseur, ni un multiple de".

   797 774
   720 80
   744 216
   1950 975
   215 1720
   665 5320

4. Écrire la liste de tous les diviseurs de 567.

Exercice 11:
Écrire les nombres suivants sous la forme d'un produit de facteurs premiers.

1. 15 120 = | 2. 4 095 = | 3. 257 400 =

Exercice 12:
Écrire les nombres suivants sous la forme d'un produit de facteurs premiers.

1. 129 360 = | 2. 82 620 = | 3. 85 680 =

Exercice 13:
Mettre sous forme irréductible les fractions suivantes :

1. $\dfrac{420}{165}$ | 2. $\dfrac{140}{462}$ | 3. $\dfrac{385}{840}$ | 4. $\dfrac{1680}{195}$

Exercice 14:
Mettre sous forme irréductible les fractions suivantes :

1. $A = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{7}{15}$ | 2. $B = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{4}{3}$ | 3. $C = \dfrac{3^2}{2} + \dfrac{7}{5} \times \dfrac{8}{3}$

Exercice 15:
Mettre sous forme irréductible les fractions suivantes :

1. $D = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{4}} + \dfrac{7}{8}$ | 2. $E = \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{5}{4} - \frac{4}{5}}$ | 3. $E = \dfrac{\frac{7}{4} - \frac{3}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{3}{4}}$

Exercice 16:
On considère un nombre premier $p \geq 6$. On effectue la division euclidienne de p par 6 et on écrit $p = 6q + r$ où $q, r \in \mathbb{N}$ et $q \geq 1$ et $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

1. Justifier que r ne peut pas être égal à 0, 2 ,3 ou 4
2. Les entiers de la forme $6k + 1$ et $6k + 5$ avec $k \in \mathbb{N}$ sont-ils tous des nombres premiers ?

Exercice 17:
Un fleuriste dispose de 30 tulipes et 24 muscaris. Il veut composer des bouquets contenants le même nombre de tulipes et le même nombre de muscaris en utilisant toutes se fleurs. On veut calculer le nombre maximum de bouquets qu'il peut faire.

1. Expliquer pourquoi le nombre de bouquets doit être un diviseur commun de 30 et de 24.
2. Déterminer les diviseurs de 30 et de 24.
3. Combien de bouquets peut-il réaliser au maximum ? Quelle est alors la composition de chaque bouquet ?

Exercice 18:
Dans une partie de cartes, on doit répartir entre les joueurs 180 jetons noirs et 120 jetons blancs. Chaque joueur doit recevoir le même nombre de jetons noirs et le même nombre de jetons blancs.

1. Peut-il y avoir vingt joueurs ? Neuf joueurs ?
2. Combien peut-il y avoir de joueurs ? Donner toutes les possibilités.

Exercice 19:
La somme de quatre multiples consécutifs de 7 est égale à 406. Quels sont ces quatres entiers ?

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 20:
Proposer un programme Python qui détermine, à partir de deux entiers a et b, si a est un multiple de b.

Exercice 21:

1. Ecrire un programme Python qui renvoie les dix premiers multiples d'un entier a.
2. Modifier le programme pour qu'il détermine le plus grand multiple de a inférieur à un nombre b donné.

1.4 Approfondissements

Exercice 22:
Soit n un nombre entier non premier et d le plus petit diviseur premier de n. Supposons qu'il existe un entier d' qui divise d. Démontrer que d' divise n.

Exercice 23:
On suppose que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.

1. Démontrer qu'il existe $(n, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tels que $10^n = 3a$.
2. Déterminer la décompostion en produit de facteurs premiers de 10^n.
3. On note $a = p_1^{n_1} \times ... \times p_r^{n_r}$ la décomposition en produit de facteurs premiers.
   Démontrer que $\frac{1}{3}$ ne peut pas être un nombre décimal.

Exercice 24:

1. On suppose que $\sqrt{2}$ est un quotient de deux entiers relatifs p et q. On a donc $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ irréductible.
   Démontrer que $2q^2 = p^2$ et en déduire que p^2 est pair.
2. Démontrer que p est pair.
3. p étant pair, p peut s'écrire sous la forme $2p'$. Calculer alors q^2.
   Que peut-on en déduire pour la parité de q ?
   Que peut-on dire de la fraction $\frac{p}{q}$?

Exercice 25:
Donner toutes les décompositions de 137 euros en pièces de 5 et 2 euros.