Cours :
Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 :

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 2 :
Soit G un groupe dans lequel tous les éléments de g vérifient $g^2 = e$. Montrer que G est commutatif.

Exercice 3 :

1. Soit G un groupe abélien et a, b d'ordres finis premiers entre eux.
Montrer que $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b)$.
2. Soit g un groupe abélien fini et soit m le maximum parmi les ordres des éléments de G. Montrer que l'ordre de tout élément de G divise m. (m est appelé l'exposant de G).
3. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $G \subset \mathbb{K}^*$ un sous-groupe fini du groupe multiplicatif $\mathbb{K}^*$. Montrer que G est cyclique.
4. Qu'en déduire pour le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ où p est premier ?

Cours :
Soit a un éléments d'ordre fini n dans un groupe G.
Montrer que pour tout $p \in \mathbb{Z},\ a^p = e$ si et seulement si n divise p.

Exercice 1 :

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in \{1, \dots, p-1\}$, p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} k!$ puis en déduire que p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$.
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n\ [p]$.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n que : p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

Exercice 2 :
On pose $SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\}$.

1. Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe du groupe des matrices inversibles.
2. On considère les deux matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
Montrer que A et B sont d'ordres finis mais que AB est d'ordre infini.

Exercice 3 :
Soit G un groupe fini et m un entier premier avec l'ordre de G. Montrer que pour tout $a \in G$, l'équation $x^m = a$ admet une unique solution.

Exercice 4 :
Montrer que tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et que tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

Cours :
Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.
Montrer que $f(e) = e'$ et $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

Exercice 1 :

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*,\ P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $(1\ ,\ X-a\ ,\ (X-a)^2\ ,\ \dots\ ,\ (X-1)^n)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in \{0, \dots, r-1\},\ P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 :
Ecrire la décomposition en produit de cycle à supports disjoints et calculer l'ordre et la signature de :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 2 & 9 & 5 & 6 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 7 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 2 & 4 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :
Soit $\mathbb{H}_8$ le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices :
$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$
Calculer l'ordre de $\mathbb{H}_8$ et expliciter tous ses sous-groupes.
Quel est son centre ?

Exercice 4 :
Soit $n \neq 6$, montrer que les automorphismes de S_n sont intérieurs, c'est-à-dire de la forme $s \mapsto \sigma \circ s \circ \sigma^{-1}$ où $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On s'intéressera aux images des transpositions. (pour quelle raison d'ailleurs ?)

Exercice 5 :
Soit G un groupe multiplicatif. On note D le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ et C le sous-groupe engendré par les éléments de la forme x^2.

1. Montrer que $D \subset C$.
2. On suppose que G est engendré par les éléments x qui vérifient $x = x^{-1}$. Montrer que $C = D$.
3. Soit $G = O_2(\mathbb{Q})$. Montrer que D est un sous-groupe strict de $S0_2(\mathbb{Q})$.

Exercice 4 :

1. Soit $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
   - $\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   - n et k sont premiers entre eux.
   - $\overline{k}$ appartient au groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$
2. Montrer que $(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \circ) \simeq ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \times)$.