NOM Prénom :
Interrogation 7 - Sujet A - 20 minutes — Tle tronc commun (Contrôle continue)

Exercice 1: Automatismes *(. . . / 3 points)*

1. Un article à 137 euros subit une augmentation de 37% puis une diminution de 12% puis une augmentation de 13%. Quel est le prix final de l'article ?
2. Convertir 207 cL/min en L/s.
3. Résoudre l'équation $(2x^2 - 5)(4x - 6) = 0$.

Solution :

1. On a l'évolution suivante : $137 \times 1,37 \times 0,88 \times 1,12 = 184,98$. Le prix final de l'article sera donc de 184,98 euros.
2. On a 207 cl/min $= 0,0345$ L/s.
3. On a $2x^2 - 5 = 0$ ou $4x - 6 = 0$.
   On a donc $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ ou $x = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ou $x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Exercice 2: Tronc commun *(. . . / 4 points)*

1. Simplifier l'expression $\log\left(\frac{10^2 \times 10^5}{10^{-57}}\right)$.
2. Résoudre l'équation $5\log(x) - 6 = 10$.
3. On étudie l'évolution d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé.
   On admet que l'expression :
   $$f(t) = 652 \times 0,945^t$$
   donne le nombre de bactéries présentes dans cette culture en fonction du temps t, exprimé en heures.
   (a) Calculer le nombre de bactéries présentes dans le liquide à l'instant $t = 0$ puis au bout de 3h30min.
   (b) Déterminer au bout de combien de temps la population de bactéries aura diminué de moitié.

Solution :

1. On a $\log\left(\frac{10^2 \times 10^5}{10^{-57}}\right) = \log(10^{2+5-(-57)}) = \log(10^{64}) = 64$.
2. On a $x = 10^{\frac{16}{5}}$.
3. (a) On a $f(0) = 652$ et $f(3,5) = 652 \times 0,945^{3,5} \simeq 535$.
   (b) On veut résoudre $f(t) = 326$. On a donc $t = \frac{\log(0,5)}{\log(0,945)} \simeq 12,25$.
   La population de bactérie aura donc diminué de moitié après 12h15min.

Exercice 3: Spécialité Maths-Physique *(... / 4 points)*
On considère la fonction f définie par $f(x) = (5x - 1)e^{-7x}$.

1. (a) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
   (b) Déterminer la valeur exacte de $f\left(\dfrac{12}{35}\right)$.
2. On suppose que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. En détaillant les calculs, montrer que l'on a :

$$f'(x) = (-35x + 12)e^{-7x}$$

3. Etablir le tableau de signe de f' puis le tableau de variation de f.

Solution :

1. (a) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées.
   (b) On a $f\left(\dfrac{12}{35}\right) = \dfrac{5}{7}e^{-\frac{12}{5}}$.
2. On a $f'(x) = 5e^{-7x} + (-7) \times (5x - 1)e^{-7x} = (5 - 35x + 7)e^{-7x} = (-35x + 12)e^{-7x}$.
3. On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{12}{35}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{5}{7}e^{-\frac{12}{5}}$	$\searrow$	0

Exercice 1: Automatismes *(. . . / 3 points)*

1. Un article à 257 euros subit une augmentation de 47% puis une diminution de 32% puis une augmentation de 23%. Quel est le prix final de l'article ?
2. Convertir 613 cL/min en L/s.
3. Résoudre l'équation $(5x^2 - 8)(2x - 5) = 0$.

Solution :

1. On a l'évolution suivante : $257 \times 1,47 \times 0,68 \times 1,23 = 315,98$. Le prix final de l'article sera donc de 315,98 euros.
2. On a 613 cl/min $= 0,0102$ L/s.
3. On a $5x^2 - 8 = 0$ ou $2x - 5 = 0$.
   On a donc $x = -\sqrt{\frac{8}{5}}$ ou $x = \sqrt{\frac{8}{5}}$ ou $x = \frac{5}{2}$.

Exercice 2: Tronc commun *(. . . / 4 points)*

1. Simplifier l'expression $\log\left(\frac{10^9 \times 10^3}{10^{-71}}\right)$.
2. Résoudre l'équation $9\log(x) + 8 = 10$.
3. On étudie l'évolution d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé.
   On admet que l'expression :
   $$f(t) = 785 \times 0,736^t$$
   donne le nombre de bactéries présentes dans cette culture en fonction du temps t, exprimé en heures.
   (a) Calculer le nombre de bactéries présentes dans le liquide à l'instant $t = 0$ puis au bout de 3h30min.
   (b) Déterminer au bout de combien de temps la population de bactéries aura diminué de moitié.

Solution :

1. On a $\log\left(\frac{10^9 \times 10^3}{10^{-71}}\right) = \log(10^{9+3-(-71)}) = \log(10^{83}) = 83$.
2. On a $x = 10^{\frac{2}{9}}$.
3. (a) On a $f(0) = 785$ et $f(3,5) = 785 \times 0,736^{3,5} \simeq 268$.
   (b) On veut résoudre $f(t) = 392,5$. On a donc $t = \frac{\log(0,5)}{\log(0,736)} \simeq 2,26$.
   La population de bactérie aura donc diminué de moitié après 2h15min.

Exercice 3: Spécialité Maths-Physique *(... / 4 points)*
On considère la fonction f définie par $f(x) = (9x-1)e^{-2x}$.

1. (a) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

   (b) Déterminer la valeur exacte de $f\left(\dfrac{11}{18}\right)$.

2. On suppose que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. En détaillant les calculs, montrer que l'on a :

$$f'(x) = (-18x+11)e^{-2x}$$

3. Etablir le tableau de signe de f' puis le tableau de variation complet de f.

Solution :

1. (a) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées.

   (b) On a $f\left(\dfrac{11}{18}\right) = \dfrac{9}{2}e^{-\frac{11}{9}}$.

2. On a $f'(x) = 9e^{-2x} + (-2)\times(9x-1)e^{-2x} = (9-18x+2)e^{-2x} = (-18x+11)e^{-2x}$.

3. On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{11}{18}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}e^{-\frac{11}{9}}$	$\searrow$	0