1 Fonctions usuelles

1.1 Fonctions affines et second degré

Exercice 1:
Préciser, pour les fonctions affines suivantes, les valeurs du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine puis justifier le sens de variation de la fonction.

1. $f(x) = 2x - \dfrac{3}{4}$
2. $g(x) = 7 - 3x$
3. $h(x) = \dfrac{2}{3}x - 5$

Exercice 2:

1. Déterminer la fonction affine f dont la représentation graphique est la droite $\mathcal{D}$ d'ordonnée à l'origine 6 et de coefficient directeur -5.
2. Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'axe des abscisses?

Exercice 3:
Déterminer, en expliquant, si les fonctions suivantes sont, ou non, des fonctions affines.

1. $f : x \mapsto 13 \times (3x + 6)$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x}{9} + \dfrac{1}{4}$.
3. $f : x \mapsto 4\sqrt{x} + 2$
4. $f : x \mapsto -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{7}$.
5. $f : x \mapsto \sqrt{5}x + \sqrt{17}$.
6. $f : x \mapsto -6x^2 - 6x + 7$.

Exercice 4:

1. Soit $f : x \longmapsto 6x$. Calculer $f(8)$.
2. Soit $f : x \longmapsto 6x + 4$. Calculer $f(6)$.
3. Soit $f : x \longmapsto 5x+2$. Calculer $f(-3)$.
4. Soit $f : x \longmapsto 3x$. Calculer $f(4)$.
5. Soit $f : x \longmapsto \frac{4}{5}x$. Calculer $f(15)$.
6. Soit $f : x \longmapsto \frac{4}{5}x+1$. Calculer $f(35)$.

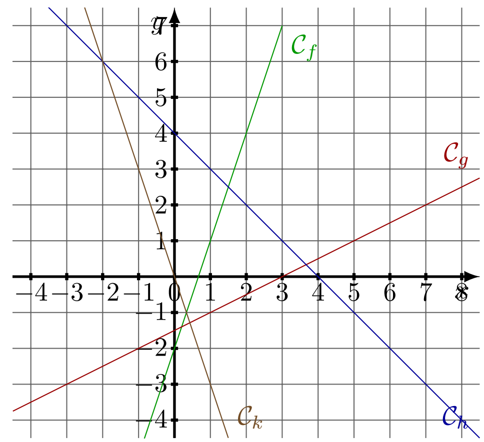
Exercice 5:

1. Soit $f : x \longmapsto -3x + 2$.
   Quel est l'antécédent de 26 ?
2. Soit f la fonction qui à x associe $4x$.
   Quel est l'antécédent de 28 ?
3. Soit f la fonction qui à x associe $4x$.
   Quel est l'antécédent de -8 ?
4. Soit $f : x \longmapsto -3x - 2$.
   Quel est l'antécédent de -14 ?
5. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{5}{2}x$.
   Quel est l'antécédent de 25 ?
6. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{3}{5}x + 4$.
   Quel est l'antécédent de 19 ?

Exercice 6:
Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 1$.
Représenter graphiquement la fonction f puis déterminer le signe de $f(x)$.

Exercice 7:
Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{4}{3}x - 1$.
Représenter graphiquement la fonction f puis déterminer le signe de $g(x)$.

Exercice 8:
Déterminer graphiquement les expressions des fonctions affines f, g, h et k.



Exercice 9:

1. Déterminer la fonction affine f vérifiant $f(-1) = 4$ et $f(2) = -2$.
2. Déterminer la fonction affine g dont la représentation graphique est la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(1; -1)$ et $B(3; 4)$.

Exercice 10:
Résoudre les équations suivantes.

1. $-3x + 8 = 0$
2. $5x - 7 = 2 - 6x$
3. $\left(2x + \dfrac{5}{3}\right)(-4x + 5) = 0$

Exercice 11:
Résoudre les inéquations suivantes.

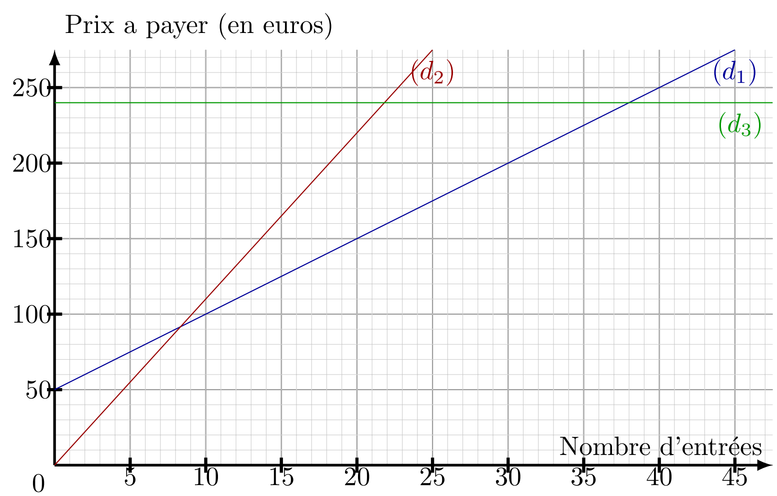
1. $5x - 3 < 0$
2. $4x + 1 > -2 - 3x$

Exercice 12:
Un cinéma porpose trois tarifs :

- ”Classique” : La personne paye chaque entrée 11 euros.
- ”Essentiel” : La personne paye un abonnement annuel de 50 euros puis chaque entrée coûte 5 euros.
- ”Liberté” : La personne paye un abonnement annuel de 240 euros avec un nombre d'entrées illimité.

1. Avec le tarif ”Classique”, une personne souhaite acheter trois entrées au cinéma. Combien va-t-elle payer ?
2. Avec le tarif ”Essentiel”, une personne souhaite aller huit fois au cinéma. Montrer qu'elle va payer 90 euros.
3. Dans la suite, x désigne le nombre d'entrées au cinéma. On considère les trois fonctions f , g et h suivantes :
   $f : x \mapsto 50 + 5x \quad g : x \mapsto 240 \quad h : x \mapsto 11x$
   Associer, en justifiant, chacune de ces fonctions au tarif correspondant.

   Le graphique ci-dessous représente le prix à payer en fonction du nombre d'entrées pour chacun de ces trois tarifs.



4. A quel tarif correspond chaque droite ? Justifier.
5. Quel tarif propose un prix proportionnel au nombre d'entrée ?
6. Répondre graphiquement aux questions suivantes :
   (a) Avec 150 euros, combien oeut-on achter d'entrées au maximum avec me tarif ”Essentiel” ?
   (b) A partir de combien d'entrées le tarif ”Liberté” devient-il le plus intéressant ?
   (c) Si on décide de ne pas dépasser un budget de 200 euros, quel est le tarif qui permet d'acheter le plus grand nombre d'entrées?
7. Retrouver, en résolvant une équation, le résultat de la question 6.(a).
8. Déterminer, en résolvant une inéquation, à partir de combien de place le forfait ”Essentiel” est plus intéressant que le forfait ”Classique” ?

Exercice 13:
A l'aide d'un tableau de signe, résoudre les inéquations suivantes :

1. $(2x - 1)(-4x + 3) > 0$
2. $(7 + 5x)(3x - 9) \geq 0$

Exercice 14:
Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - 8x + 9 = 0$
2. $-x^2 + 3x + 4 = 0$
3. $2x^2 + x - 1 = 0$

Exercice 15:
Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$
2. $-7x^2 + 4x > 0$
3. $x^2 - 8x - 9 \leq 0$

1.2 Fonctions exponentielle et logarithme

Exercice 16:
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sqrt{\dfrac{e \times e^{-5}}{e^2}}$
2. $\dfrac{e^{1,4} \times e^{-1}}{e^{1,2}}$
3. $\sqrt{\dfrac{e \times e^2}{e^{-7}}}$
4. $e^{1,5} \times \left(e^{-0,5}\right)^5$

Exercice 17:
Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{e^{x^2} \times (e^x)^2}{e^{(x+1)^2}}$
2. $\dfrac{e^{3+x}}{e^{3-x}}$
3. $\dfrac{e^{2x+4} \times e^{-x+1}}{e^{x+5}}$

Exercice 18:
Simplifier les expressions suivantes.

1. $A = e^4 \times e^7 \times e^{-2}$
2. $B = \dfrac{e^{3x} + e^x}{e^x}$
3. $C = e \times (e^2)^3$
4. $D = \dfrac{e^{3x} \times e^x}{2e^{2x}}$

Exercice 19:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{-7x} \times e^{2x+8} = e^{-x+3}$
2. $\dfrac{e^{3x-1}}{e^{-5x+4}} = 1$
3. $(e^{3x})^2 \times e^{x+5} = 1$
4. $e^{1-x} - e^{2x} = 0$

Exercice 20:
Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x(e^x - 1) = 0$
2. $(e^x + 8)(e^x - e) = 0$
3. $xe^{2x+1} = x$
4. $(e^{-3x+6} - e)(e^{x^2} - 1) = 0$

Exercice 21:
Résoudre les équations suivantes.

1. $e^x = 1$
2. $e^x = -1$
3. $e^x = \frac{1}{e^2}$
4. $2e^x - 3 = 0$

Exercice 22:
Résoudre les équations suivantes :

1. $7 - e^{3x-1} = 0$
2. $(2e^x - 3)(e^{2x} - 8) = 0$
3. $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ (On posera $X = e^x$)

Exercice 23:
Résoudre les inéquations suivantes.

1. $e^{3x-1} \geq 1$
2. $e^{5x+2} < e$
3. $-3e^{2x} + 5 > -1$

Exercice 24:
Ecrire les réels suivants en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.

1. $\ln(12)$
2. $\ln(18)$
3. $\ln(\sqrt{24})$

Exercice 25:
Sans calculatrice, donner la valeur numérique des nombres suivants :

1. $\ln(e^2)$
2. $\ln(\sqrt{e})$
3. $\ln(\frac{1}{e})$
4. $2\ln(e^3)$
5. $\ln(\frac{1}{\sqrt{e}})$

Exercice 26:
Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Donner la valeur exacte des réels suivant:

1. $f(e)$
2. $f(e^2)$
3. $f(\frac{1}{e})$
4. $f(\sqrt{e})$

Exercice 27:
Simplifier les expressions suivantes pour les écrire en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$ seulement.

1. $A = \ln(10) - \ln\left(\frac{1}{4}\right)$
2. $B = \ln\left(\frac{25}{8}\right)$
3. $C = 3\ln(5e^2) - \ln(20e^{-1})$

Exercice 28:
Simplifier les expressions suivantes.

1. $\ln(\sqrt{27}) - \dfrac{1}{2}\ln(9)$
2. $\dfrac{e^{\ln(5)}}{e^{2\ln(5)}}$
3. $2\ln(x) - \ln(3x)$

Exercice 29:
Simplifier les écritures suivantes :

1. $\ln(3) + \ln(4) - \ln(6)$
2. $4\ln(3) - \ln(9) + 2\ln(27)$
3. $\frac{\ln(9)}{\ln(3)} - \ln(1)$
4. $\ln(3x^2) - \ln(3)$ avec $x > 0$

Exercice 30:
Ecrire les expressions suivantes sous la forme $\ln(f(x))$, où $f(x)$ est une expression qui dépend de x.

1. $A(x) = \ln(x+3) + \ln(2x)$
2. $B(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$

Exercice 31:
Ecrire les expressions suivantes sous la forme $\ln(f(x))$, où $f(x)$ est une expression qui dépend de x.

1. $C(x) = \ln(3-x) + \ln(1+2x)$
2. $D(x) = \ln(3x-6) - \ln(3)$

Exercice 32:
Résoudre les équations suivantes :

1. $e^x = 5$
2. $\ln(x) = -5$
3. $\ln(2x-1) = -2$
4. $\ln(1+x) = 100$

Exercice 33:
Résoudre les équations suivantes après avoir identifié l'intervalle de définition.

1. $\ln(x) - 3 = 0$
2. $5\ln(x) - 2 = 7$
3. $\ln(2x-1) = 0$
4. $\ln(3x+1) = 1$

Exercice 34:
Résoudre les équations suivantes après avoir identifié l'intervalle de définition.

1. $(\ln(x)+2)(3\ln(x)-4) = 0$
2. $\ln^2(x) = 4$
3. $\ln(x-3) + \ln(2x+1) = \ln(4)$
4. $\ln(x^2) = 1$

Exercice 35:
Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. $\ln(x) > 5$
2. $\ln(4x) \leq 0$
3. $1 - 2\ln(x) > 0$
4. $2\ln(x) - 3\ln(2) \geq 0$

1.3 Fonctions cosinus et sinus

Exercice 36:
A partir des valeurs remarquables, déterminer, à l'aide du cercle trigonométrique :

1. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
2. $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
3. $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$
4. $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

Exercice 37:
Déterminer les cosinus et sinus des réels suivants :

1. $\frac{\pi}{6}$
2. $\frac{4\pi}{3}$
3. $-\frac{11\pi}{2}$

Exercice 38:
Résoudre les équations suivantes sur $[0; 2\pi[$.

1. $\cos(x) = 0$
2. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $2\sin(x) + 1 = 0$

Exercice 39:
Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\cos(x) < \frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi[$.
2. $\sin(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $]-\pi; \pi]$.

Exercice 40:

1. L'équation $2\cos(x) - 2 = 0$ a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? Si oui, lesquelles ?
2. L'équation $\cos(x) - \sqrt{3} = 0$ a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? Si oui, lesquelles ?

Exercice 41:
Un des funiculaires de Lyon relie le Vieux Lyon au quartir de Fourvière. Il permet de s'élever de 116 mètres sur un trajet long de 427 mètres.

1. Déterminer la mesure de l'angle α de la pente en degrés (à $0,1$ près).
2. Convertir cette mesure en radians.
3. Le téléphérique met 3 minutes pour parcourir cette distance. Quelle est sa vitesse moyenne en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$?
4. Sa vitesse instantanée, en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, est donnée par
$$v(t) = 5,95\sin\left(-\frac{\pi}{180}t + \pi\right)$$
. Quelle est sa vitesse au bout de 10 secondes ? d'une minute ?
5. A quel moment le téléphérique atteint-il sa vitesse maximale ?
6. La vitesse maximale doit être inférieure à 6 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Ce critère est-il respecté ?

Exercice 42:
La température dans une ville est modélisée par la donnée
$$\theta(t) = 1,7\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right)$$
où t est exprimé en mois. Le 1er janvier correspond à $t = 0$.

1. Quelle est la température le 1er février ? le 1er décembre ?
2. Quels sont les températures extrêmes ? A quelles dates correspondent-elles ?
3. Avec quelle périodicité retrouve-t-on des températures analogues ?

Exercice 43:
La ville de Madrid est située sur la parallèle de latitude 40° Nord. Pendant une année non bissextile, le nombre d'heures de lumière d'une ville située à cette latitude peut être modélisé par la fonction d définie sur $[0;365]$ par :

$$d(t) = 3\sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) + 12$$

où t représente le t-ième jour de l'année.
Déterminer la période l'année durant laquelle Madrid bénéficie de plus d'heures de lumière par jour.

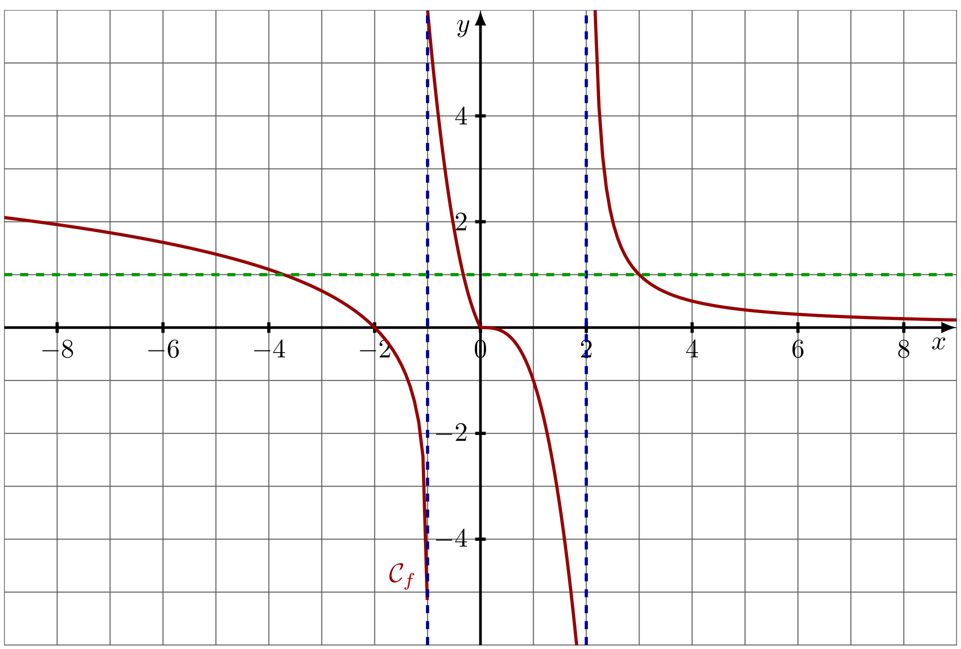
2 Limites

2.1 Limites et asymptotes

Exercice 44:
Déterminer les limites en $\pm\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$
2. $g(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5$
3. $h(x) = x^3 - 5x^2 - 1$

Exercice 45:
Déterminer graphiquement les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction f dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous (il y a 6 cas de limites). En déduire les éqautions des asymptotes éventuelles à $\mathcal{C}_f$.



Exercice 46:
Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + \sqrt{x} - \dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to0^+} \left(3 - \dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x^2} + 5x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3 - \dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x^2} + 5x\right)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x + \ln(x))$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-3x + e^{-x})$

Exercice 47:
Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to0^-} \left(\frac{e^x}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to2^+} (\ln(x-2))$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} (4-x^2)(2x-3)$
4. $\lim\limits_{x\to4^+} \left(2x - 3 + \frac{1}{x-4}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3 - \frac{5}{1-2x}\right)$

Exercice 48:
Soit $f : x \mapsto \frac{2x^2}{x-1}$ définie sur $]1;+\infty[$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat en termes d'asymptote.
2. (a) Démontrer que $f(x) = 2x + 2 + \frac{2}{x-1}$. En déduire que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x + 2$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   (b) Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$.

2.2 Limites et formes indéterminées

Exercice 49:
Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

1. $f : x \mapsto x^3 - 2x$
2. $f : x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$
3. $f : x \mapsto \frac{x^2-x}{x^3-2}$
4. $f : x \mapsto \frac{3x^3+2}{2x^2+4}$

Exercice 50:
Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

1. $f : x \mapsto 3x^5 - x^2$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1-e^x}{1+e^{2x}}$

2.3 Limites et composées

Exercice 51:
Déterminer les limites en $\pm\infty$ des fonctions suivantes.

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x}+2}$
2. $g(x) = e^{-3x+2}$
3. $h(x) = (2x^3 + x - 2)^3$

Exercice 52:
Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \frac{e^{5x+1}}{x}$
2. $g(x) = \ln(x) + e^{-2x}$
3. $h(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$

3 Dérivation

3.1 Fonctions dérivées

Exercice 53:
On considère la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Calculer $f'(x)$ puis déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.
2. Existe-t-il des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente sera parallèle à la droite d'équation $y = -9x + 2$? Si oui, déterminer leurs coordonnées.

Exercice 54:
Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$
2. $g(x) = 3x^2 - 8x + 7$
3. $h(x) = 2x^3 + x + 4$

Exercice 55:
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction puis l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f(x) = -5 - 5x$
2. $g(x) = -6 - \frac{3}{x}$
3. $h(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{7x}$
4. $j(x) = 5x^2 - 5x - 1$

Exercice 56:
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction puis l'expression de sa fonction dérivée.

1. $k(x) = -3x^2 - 8\sqrt{x} + 4$
2. $l(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{9} + \dfrac{5}{9}$
3. $m(x) = -5{,}6x^4 - 1{,}5x^2 - 5$
4. $o(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 9$

Exercice 57:
Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 2x + 1 + e^{-x}$
2. $g(x) = xe^x$
3. $h(x) = \sin(x) + 3\cos(x)$

Exercice 58:
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto (5x + 3)(-2x + 1)$
2. $g : x \mapsto -4x\sqrt{x}$
3. $h : x \mapsto (3x^2 - 5)(2x - 4)$
4. $\phi : x \mapsto \frac{1}{4-2x}$

Exercice 59:
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

1. $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$
2. $\alpha : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2 + 2x + 4}$
3. $\beta : x \mapsto \dfrac{1}{x - 1}$
4. $\upsilon : x \mapsto \dfrac{5x + 7}{-3x + 2}$

Exercice 60:
Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = (3x - 5)^3$
2. $g(x) = (2x+3)(e^x+1)$
3. $h(x) = 7x - 6 + e^{-2x}$

Exercice 61:
Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 4x + 1}$
2. $g(x) = e^{-x}\sin(x)$
3. $h(x) = \ln(x^2 + 1)$

Exercice 62:
Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

1. $f(x) = -3\ln(x) + x^2 - 5x + 3$ sur $I =]0; +\infty[$
2. $g(x) = x\ln(x) - x + 4$ sur $I =]0; +\infty[$
3. $h(x) = \dfrac{x + 2 - \ln(x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$
4. $k(x) = 2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$.

3.2 Dérivées et sens de variation

Exercice 63:
Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 64:
Pour chaque fonction suivante, calculer sa dérivée, le signe de sa dérivée puis établir le tableau de variation de la fonction sur I

1. $f(x) = -3x^2 + 2x + 4$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$
3. $h(x) = x + 3 - 5\ln(x-1)$ sur $I =]1; +\infty[$

Exercice 65:
Pour chaque fonction suivante, calculer sa dérivée, le signe de sa dérivée puis établir le tableau de variation de la fonction sur I

1. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 3$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x - \ln(x)$ sur $I =]0; +\infty[$
3. $h(x) = \dfrac{-2e^x}{x+1}$ sur $I =]-1; +\infty[$

Exercice 66:
Pour chaque fonction suivante, calculer sa dérivée, le signe de sa dérivée puis établir le tableau de variation de la fonction sur I

1. $f(x) = e^{2x} - 2x + 3$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $g(x) = x\ln(x)$ sur $I =]0; +\infty[$

Exercice 67:
Un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes de ce produit par semaine durant la période de production de truffe. On désigne par $B(x)$ le bénéfice hébdomadaire (en euros) réalisé par la vente de x kilogrammes de truffes. La fonction B est définie sur l'intervalle $[0; 45]$ par :

$$B(x) = -x^3 + 60x^2 - 525x$$

1. Calculer $B'(x)$ pour $x \in [0; 45]$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [0; 45]$, $B'(x) = (-3x + 15)(x - 35)$.
3. Etudier le signe de $B'(x)$ sur $[0; 45]$. En déduire le tableau de variation de la fonction B.
4. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal ? A combien s'élève-t-il alors ?

Exercice 68:
Le service d'urgence d'un hôpital reçoit un patient infecté par une bactérie très virulente. On administre à ce patient un puissant antibiotique. On considère que la fonction f permet de modéliser, en fonction du temps, le nombre de bactéries (en centaines), présentes dans le prélèvement sanguin effectué sur le patient à l'instant t (en heures). Cette fonction est définie sur l'intervalle $[0; 12]$ par :

$$f(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t + 190$$

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(t)$ pour tout réel $t \in [0; 12]$.
2. Montrer que, pour tout réel $t \in [0; 12]$: $f'(t) = -3(t+1)(t-7)$.
3. Etudier le signe de $f'(t)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0; 12]$.
4. Déterminer le maximum de f sur l'intervalle $[0; 12]$ et préciser en quelle valeur de t il est atteint. Interpréter ce résultat.
5. La vitesse de croissance du nombre de bactéries à l'instant t est donnée par $f'(t)$. Déterminer la vitesse de croissance du nombre de bactéries à l'instant $t = 10$.

3.3 Equation du type $f(x) = k$

Exercice 69:
On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 6x - 7$ définie sur $[-3; 4]$.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $[-3; 4]$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3; 4]$. Par balayage à la calculatrice, déterminer un encadrement de α à $0,01$ près.

Exercice 70:
On considère la fonction $f : x \mapsto x - 2 - 2\ln(x)$ définie sur $[1; 10]$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[1; 10]$.
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $[1; 10]$.
3. Justifier le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[1; 10]$. Par balayage à la calculatrice, déterminer un encadrement de chaque solution à $0,1$ près.

4 Problèmes

Problème 1:
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+2-\ln(x)}{x^2}$ définie sur $[1;25]$.

1. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{-3+\ln(x)}{x^2}$.
2. Résoudre l'inéquation $-3+\ln(x) > 0$ sur $[1;25]$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[1;25]$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1;25]$. Par balayage à la calculatrice, déterminer un encadrement de α à $0,01$ près.
5. Une entreprise fabrique entre 100 et 2 500 objets par jour, le coût unitaire, en euros, pour x cnetaines d'objets produits est égal à $f(x)$. L'entreprise vend chaque objet $1,50$ euros pièce. A partir de quelle quantité d'objets produit et vendus, l'entreprise est-elle bénéficiaire ?

Problème 2:
On étudie l'évolution du pods, en grammes, d'une mouette rieuse en fonction du temps t en jours sur la côte méditerranéenne.

Deux modèles ont été établis par les scientifiques, le premier qui caractérise le poids de la mouette par la fonction

$$f_1(t) = 35e^{0,058t}$$

et le deuxième par la fonction

$$f_2(t) = \frac{350}{1+12e^{-0,15t}}$$

définies sur $[0;+\infty[$.

1. En calculant les dérivées des fonctions f_1 et f_2, étudier leurs sens de variation sur $[0;+\infty[$.
2. Calculer les limites en $+\infty$ des fonctions f_1 et f_2. Interpréter les résultats dans le contexte de l'exercice.
3. Sachant qu'à l'âge adulte, une mouette rieuse pèse environ 350 g et qu'elle atteint 90% de ce poids après 30 jours, quel est le modèle qui se rapproche le plus de ces observations ?

Problème 3:
Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 35e^{-1,5x} - 30$$

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = -24$ admet une unique solution α sur $[0;2]$. Par balayage à la calculatrice, déterminer un encadrement de α à 0,01 près.

Partie B

Un aliment est placé dans un tunnel de congélation mesurant 100 m de long et maintenu à une température de -30°C.
Lorsque cet aliment se déplace dans le tunnel pendant une durée t en heure, sa température est donnée par

$$T(t) = 35e^{-1,5t} - 30$$

1. Interpréter la limite en $+\infty$ obtenu dans la partie A dans le contexte de l'exercice.
2. Grâce aux résultats précédents, indiquer le temps nécessaire pour que la température de l'aliment placé dans le tunnel atteigne -24°C.
3. La vitesse du tapis roulant dans le tunnel peut varier de 0 à 200 m/h par tranche de 5 m/h. Quelle est la vitesse maximale que l'on peut choisir pour être certain que la température de l'aliment soit de -24°c à la sortie du tunnel ?

Problème 4:
L'entreprise Boisneuf fabrique des charpentes en bois. Elle souhaite étudier la déformation des pièces de bois qu'elle utilise pour ses charpentes lorsque celles-ci sont soumises à une charge constante. Le jour de l'installation la poutre ne subit aucune déformation.

On considère alors la fonction f, définie sur $[0;\infty[$, représentant la déformation en millimètres de la poutre en fonction du temps t exprimé en jours à partir de l'installation.

Partie A

1. Expliquer pourquoi $f(0) = 0$.
2. On sait que la fonction f est de la forme $f(t) = ke^{-0,0125t} + 4$. Déterminer le réel k.

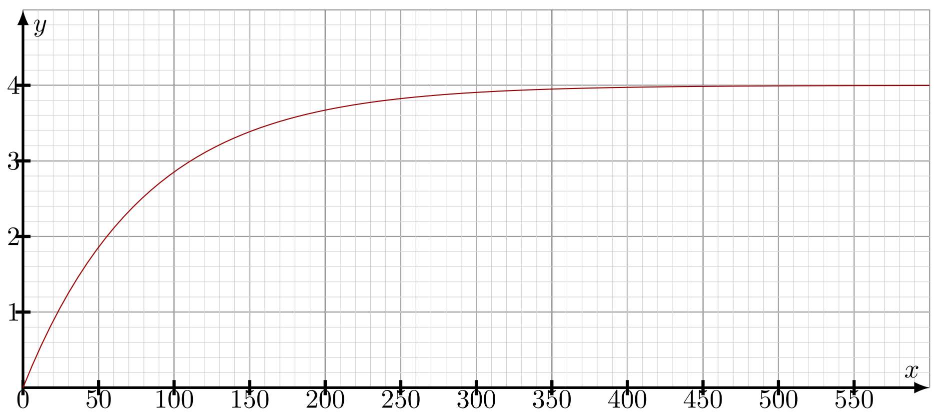
Partie B

On admet que pour tout t positif :

$$f(t) = 4(1 - e^{-0,0125t})$$

La courbe représentative de la fonction est donnée ci-dessous.

1. Avec la précision permise par le graphique, déterminer la déformation au bout de 150 jours.



2. (a) Avec la précision permise par la graphique, déterminer le nombre de jours nécessaire pour que la déformation atteigne 2 mm.
   (b) Retrouver ce résultat par le calcul.
3. (a) Déterminer graphiquement la déformation limite de la poutre à long terme.
   (b) Déterminer par le calcul le nombre de jours à partir duquel la déformation atteint 90% de sa valeur limite.

Problème 5:
Les pompiers utilisent dans le cadre de leurs interventions, une grande échelle téléscopique équipée d'une nacelle. On souhaite étudier la hauteur de la nacelle au cours du temps lors de l'élévation de celle-ci : on note $f(t)$ la hauteur en mètres de la nacelle en fonction du temps t en secondes. Cette fonction est définie sur $[0;+\infty[$ par :

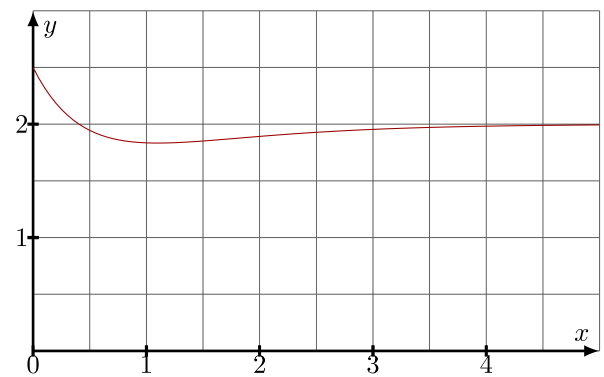
$$f(t) = 15 - 12e^{-0,2t}$$

1. Quelle est la hauteur de la nacelle à l'instant $t = 0$?
2. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer $f'(t)$ puis établir le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f à l'aide d'un outil numérique et vérifier les résultats précédents.
5. On considère que l'échelle est stabilisée lorsque la nacelle atteint une hauteur de $14,6$ m. Par calculs, déterminer le temps t_0 en secondes, pour que l'échelle soit stabilisée.

Problème 6:
Une étude est menée concernant le train d'atterrissage d'un certain type d'hélicoptère. Ce train d'atterrissage est composé d'une roue et d'un amortisseur oléopneumatique permettant d'absorber l'énergie de l'impact au moment de l'atterrissage.
On admet que la fonction f correspondant à la hauteur (en mètre) du centre de gravité de l'hélicoptère par rapport au sol à l'instant t (en seconde) est définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(t) = -e^{-t} + 1,5e^{-2t} + 2$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.



1. Déterminer la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère au moment de l'atterrissage à l'instant $t = 0$.
2. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.
3. (a) A l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$.
   (b) Exprimer $f'(t)$ en fonction de t puis montrer que $f'(t) = e^{-2t}(e^t - 3)$.
   (c) Résoudre sur $[0;+\infty[$ l'équation $e^t - 3 \geq 0$.
   (d) En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[0;+\infty[$.
   (e) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$.