Cours :
Enoncer et démontrer le lemme d'Abel.

Exercice 1 :

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \cosh(x)$ et préciser le rayon de convergence.

3. (a) Déterminer $S(x)$.

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(0) & = 1 \\ f(x) & = \cosh(\sqrt{x}) \quad \text{si} \quad x > 0 \\ f(x) & = \cos(\sqrt{-x}) \quad \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :
Déterminer le rayon de convergence la série :

$$\sum_{n \geq 0} \int_0^1 (1+t^2)^n dt \; x^n$$

Exercice 3 :
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif. Donner le rayon de convergence de la série :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n! a_n}{n^n} z^n$$

Cours :
Enoncer et démontrer le résultat sur le rayon de convergence d'une somme de séries entières.

Exercice 1 :
Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

$$\begin{cases} \sum_{n\geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n} \\ \sum a_n x^n \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{2n} & = 4^n \\ a_{2n+1} & = 5^{n+1} \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 2 :
Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2n+1}$$

Exercice 3 :
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif.
Soit $\beta > 0$, déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n\geq 0} \beta^n a_n z^n$$

Exercice 4 :
Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
Montrer que pour $0 < r < R$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

Cours :
Enoncer et démontrer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Exercice 1 :

1. Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \arcsin(x)$ ainsi que son rayon de convergence.

4. En déduire la valeur de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$$

Exercice 2 :
Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{np+1}$$

Exercice 3 :
Soit θ un réel fixé, déterminer le rayon et la somme de la série entière :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$$

Exercice 4 :
Le but de cet exercice est de donner une condition sous laquelle la loi d'une variable aléatoire réelle X est caractérisée par la suite de ses moments $(\mathbb{E}(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$.

1. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{\varepsilon|X|}) < +\infty$. Montrer que la fonction $L(z) = \mathbb{E}(e^{zX})$ est bien définie sur $S = \{z \in \mathbb{C},\ |\Re(z)| < \varepsilon\}$ et qu'elle est développable en série entière en 0 sur cet ensemble.

Exercice 4 :
On considère les deux séries :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

Déterminer leur disque de convergence respectifs D_f et D_g et montrer que ces fonctions coïncident sur $D_f \cap D_g$.

Exercice 5 :
Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que les coefficients du développement en série entière en 0 de la fraction :

$$F(x) = \frac{1}{1 - ax + ax^2 - x^3}$$

soient tous positifs.

Exercice 5 :
Soit $a > 0$, on pose, pour $x \in]-a, a[$:

$$f(x) = \ln(a-x)\ln(a+x)$$

Déterminer, selon les valeurs de a et pour m assez grand, le signe de $f^{(m)}$.

On pourra utiliser le développement de f en série entière.

2. En exploitant l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) \leq e^{|x|} \leq 2\cosh(x)$$

Montrer que :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \mathbb{E}(e^{\varepsilon|X|}) < +\infty$$
$$\iff$$
$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X^{2n})^{\frac{1}{2n}} \leq Cn$$

3. Montrer que si X satisfait cette condition et si $\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors X et Y suivent la même loi.

Exercice 5 :
Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction :

$$F : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\, dt$$