Chapitre 2 : Equations différentielles

Table des matières

Une équation différentielle est une équation liant une fonction et sa ou ses dérivée(s) : c'est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui satisfont à l'égalité.

1 Equations différentielles d'ordre 1

Définition :
Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation, dont l'inconnue est une fonction y de la variable t, de la forme

$$(E): \quad ay'(t) + by(t) = f(t)$$

où a et b sont des constantes réelles, et f est une fonction.

Exemple :
L'équation $y' - 2y = xe^x$ est une équation linéaire du premier ordre d'inconnue y de la variable x.

1.1 Solution générale de l'équation sans second membre

Soit :

$$(E_h): \quad ay'(t) + by(t) = 0$$

Cette équation est appelée équation homogène associée à (E).
a étant un réel non nul, on peut encore écrire :

$$(E_h): \quad y'(t) + \frac{b}{a}y(t) = 0$$

Propriété :
Les solutions de :

$$(E_h): \quad y' + \frac{b}{a}y = 0$$

sont données par les fonctions :

$$y : t \mapsto Ce^{-\frac{b}{a}t} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

Démonstration :
On a :

$$y(t) = Ce^{-\frac{b}{a}t} \quad \text{et} \quad y'(t) = -\frac{b}{a}Ce^{-\frac{b}{a}t}$$

d'où :

$$y'(t) + \frac{b}{a}y(t) = -\frac{b}{a}Ce^{-\frac{b}{a}t} + \frac{b}{a}Ce^{-\frac{b}{a}t} = 0$$

Exemple :
On considère l'équation :

$$y' - 2y = 0$$

On a alors l'ensemble des fonctions solutions :

$$y(t) = Ce^{2t}$$

1.2 Solution particulière de l'équation différentielle (E)

Définition :
On appelle solution particulière de l'équation différentielle :

$$(E): \quad ay'(t) + by(t) = f(t)$$

toute fonction y vérifiant cette équation.

Il existe plusieurs méthodes pour trouver une solution particulière :

- Cas où $f(t)$ est une constante :
  On recherche aussi y_p sous la forme d'une constante: $y_p(t) = C$.
- Cas où $f(t)$ est un polynôme :
  On recherche y_p sous la forme d'un polynôme de même degré.
- Cas où $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + B\sin(\omega t + \varphi)$:
  On recherche $y_p(t) = A'\cos(\omega t + \varphi) + B'\sin(\omega t + \varphi)$
- Cas où $f(t) = ke^{\lambda t}$:
  On recherche y_p sous la forme $y_p(t) = Ae^{\lambda t}$.

Dans les sujets de BTS, toutes les indications permettant d'obtenir une solution particulière sont données. Bien souvent, une fonction est proposée et il suffit de vérifier que c'est une solution particulière de (E), c'est à dire de remplacer les "y" par la fonction proposée dans l'équation homogène (sans second membre), et de vérifier que l'on obtient bien le second membre.

Exercice :
Montrer que $g(x) = xe^x$ est solution particulière de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = xe^x$$

1.3 Ensemble des solutions d'une équation différentielle

Théorème :
Les solutions d'une équation différentielle (E) sont de la forme :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

où y_h est la solution de l'équation sans second membre (E_h) et y_p une solution particulière de l'équation complète (E).

Démonstration :
D'après l'aspect linéaire de l'équation différentielle.

Exercice :
Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = xe^x$$

1.4 Unicité de la solution sous condition

Théorème :
Une équation différentielle linéaire du premier ordre a une solution unique vérifiant une condition initiale donnée.

Démonstration :
En connaissant une condition initiale, on peut alors déterminer la valeur de la constante C (par unicité de l'image d'une fonction).

Exercice :
Déterminer la solution f telle que $f(0) = 0$ de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = xe^x$$

2 Equation différentielle d'ordre 2

Définition :
Une équation différentielle linéaire du second ordre est une équation, dont l'inconnue est une fonction y de la variable t, de la forme

$$(E) : \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

où a, b et c sont des constantes réelles, et f est une fonction.

Exemple :
L'équation $y'' - 2y' + y = 8e^x$ est une équation linéaire du second ordre d'inconnue y de la variable x.

2.1 Solution générale de l'équation sans second membre

Théorème :
On considère l'équation homogène:

$$(E_h) : \quad ay'' + by' + cy = 0$$

d'équation caractéristique associée :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Le tableau ci-dessous donne les solutions de (E_h) en fonction du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$: (dans tous les cas, a et b sont des constantes réelles quelconque).

	Solutions de l'équation caractéristique associée	**Solution générale de $(\mathbf{E_h})$**
$\boldsymbol{\Delta > 0}$	2 racines réelles $r_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
$\boldsymbol{\Delta = 0}$	une racine double réelle $r = -\dfrac{b}{2a}$	$y(t) = (At + B)e^{rt}$
$\boldsymbol{\Delta < 0}$	2 racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ où $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$y(t) = e^{\alpha t}\left[A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right]$

Démonstration :

Cette démonstration est très largement hors programme.

On considère y une solution de (E_h), en posant $X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$, on a alors :

$$X'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix}}_{=A} X(t)$$

On a alors le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(x) = x\left(x + \frac{b}{a}\right) + \frac{c}{a} = \frac{1}{a}(ax^2 + bx + c)$$

On étudie donc les valeurs propres de A. Si χ_A possède deux racines disctinctes, A est diagonalisable.
C'est-à-dire :

- Si $\Delta > 0$, on a deux valeurs propres réelles distinctes r_1 et r_2.
  On a alors :

  $$X'(t) = AX(t) \iff X'(t) = P\mathrm{diag}(r_1, r_2)P^{-1}X(t) \iff Y'(t) = \mathrm{diag}(r_1, r_2)Y(t) \quad \text{où } Y(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

  On a donc :

  $$Y(t) = \begin{bmatrix} K_1 e^{r_1 t} \\ K_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix} \implies X(t) = PY(t)$$

  On obtient donc le résultat :

  $$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

- On obtient le même principe si $\Delta < 0$ en prenant en compte que $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \overline{r_1} = \alpha - i\beta$.
  On effectue alors un peu de trigonométrie.
- Dans le dernier cas, si $\Delta = 0$, A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable car χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. On a alors :

  $$X'(t) = AX(t) \iff X'(t) = P\begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{bmatrix}P^{-1}X(t) \iff Y'(t) = \begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{bmatrix}Y(t) \quad \text{où } Y(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

  Le reste de la résolution est indentique au premier cas

On a donc bien les résultats escomptés.

Exemple :

- Résolution de l'équation différentielle :

  $$(E_h) : \quad y'' + \omega^2 y = 0$$

  - L'équation caractéristique de (E_h) est $r^2 + \omega^2 = 0$ de discriminant $\Delta = -4\omega^2 < 0$.
    Les solutions de cette équation sont $0 + i\omega$ et $0 - i\omega$.
  - Les solutions de (E_h) sont du type $y_h(x) = e^{0\times x}[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)] = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$.

- Résolution de l'équation différentielle :

  $$(E_h) : \quad 2y'' - 5y' - 3y = 0$$

  - L'équation caractéristique de (E_h) est $2r^2 - 5r - 3 = 0$ de discriminant $\Delta = 49 > 0$.
    Les solutions de cette équation sont $r_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $r_2 = 3$.
  - Les solutions de (E_h) sont donc du type $y_h(x) = Ae^{\frac{1}{2}x} + Be^{3x}$

- Résolution de l'équation différentielle :

$$(E_h): \quad y'' - 2y' + y = 0$$

  - L'équation caractéristique de (E_h) est $r^2 - 2r + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = 0$.
    L'équation admet donc une solution double $r = 1$.
  - Les solutions de (E_0) sont donc du type $y_h(x) = (Ax + B)e^x$.

2.2 Solution particulière de l'équation différentielle (E)

Définition :
On appelle solution particulière de l'équation différentielle :

$$(E): \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

toute fonction y vérifiant cette équation.

On recherche une solution particulière de la même façon que pour une equation du premier ordre.

Dans les sujets de BTS, toutes les indications permettant d'obtenir une solution particulière sont données. Bien souvent, une fonction est proposée et il suffit de vérifier que c'est une solution particulière de (E), c'est à dire de remplacer les "y" par la fonction proposée dans l'équation homogène (sans second membre), et de vérifier que l'on obtient bien le second membre.

Exercice :
Montrer que $g(x) = 4x^2e^x$ est solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 8e^x$$

2.3 Ensemble des solutions d'une équation différentielle

Théorème :
Les solutions d'une équation différentielle (E) sont de la forme :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

où y_h est la solution de l'équation sans second membre (E_h) et y_p une solution particulière de l'équation complète (E).

Démonstration :
D'après l'aspect linéaire de l'équation différentielle.

Exercice :
Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 8e^x$$

2.4 Unicité de la solution sous condition

Théorème :
Une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre (E) possède une unique solution vérifiant deux conditions initiales.

Démonstration :
En connaissant deux conditions initiales, on peut alors déterminer les valeurs des constantes A et B.

Exercice :
Déterminer la solution f telle que $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$ de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 8e^x$$