1 Rappels

1.1 Equation de degré 1

Exercice 1:
Résoudre les équations suivantes :

1. $7k = 3$
2. $-2C + 5 = 8$
3. $2x = -1$

Exercice 2:
Résoudre les équations suivantes :

1. $4k + 1 = 13$
2. $0,02C + 0,1 = 2,3$
3. $200x = -30$

Exercice 3:
Résoudre les équations suivantes :

1. $e^2 k + e = 0$
2. $\frac{C}{e} + 3 = e$
3. $e^{-3}x = 2e + 5$

1.2 Dérivation

Exercice 4:
Dériver les fonctions suivantes définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = 6$
2. $g(x) = -7x + 1$
3. $h(x) = x^2 + 5x - 3$

Exercice 5:
Dériver les fonctions suivantes définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = e^{7x} + e^{-2x}$
2. $g(x) = \frac{1}{3}e^{-6x} + 12e^{4x}$
3. $h(x) = \cos(3x) + 2\sin(7x)$

Exercice 6:
Dériver les fonctions suivantes définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = xe^x$
2. $g(x) = xe^{-3x}$
3. $h(x) = (x+1)e^{-x}$

Exercice 7:
Dériver les fonctions suivantes définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = x\cos(x)$
2. $g(x) = x^2\sin(3x)$
3. $h(x) = e^{-x}\cos(x)$

1.3 Systèmes d'équations

Exercice 8:
Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 5y = 23 \end{cases}$
2. $\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ -3C_1 + 4C_2 = 0 \end{cases}$

Exercice 9:
Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1. $\begin{cases} k_1 + k_2 = 2 \\ 4k_1 + 2k_2 = 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} k_1 + k_2 = 2 \\ 0,02k_1 = 0,1 \end{cases}$

Exercice 10:
Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1. $\begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ 2\lambda + 7\mu = 16 \end{cases}$
2. $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1e^2 - 3C_2e^2 = 1 \end{cases}$

Exercice 11:
Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1. $\begin{cases} k_1 + k_2 = 0,1 \\ k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ 4k_2 = 0,08 \end{cases}$

1.4 Equations de degré 2

Exercice 12:
Résoudre les équations du second degré suivantes :

1. $3x^2 - 5x + 2 = 0$
2. $x^2 + 6x + 10 = 0$
3. $16x^2 - 24x + 9 = 0$

2 Ordre d'une équation différentielle

Exercice 13:
De quel ordre sont les équations différentielles suivantes :

1. $3y' + 5y = 3$
2. $-2y'' + 5y = x^3$
3. $y' = y$
4. $2y' - 7y = x$
5. $y' + y = -1$
6. $y'' - 3y' + 3y = 0$

3 Equations différentielles d'ordre 1

3.1 Equations de la forme $ay' + by = 0$

Exercice 14:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $3y' + 2y = 0$
2. $y' = 3y$
3. $-4y' + y = 0$

Exercice 15:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2y' - 5y = 0$
2. $y' + 0,2y = 0$
3. $y' = -5y$

Exercice 16:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\frac{3}{4}y' - \frac{2}{5}y = 0$
2. $1200y' - 3y = 0$
3. $-0,015y' + y = 0$

3.2 Equations de la forme $ay' + by = 0$ avec condition initiale

Exercice 17:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - 4y = 0$ avec $y(0) = 3$.
2. $7y' + y = 0$ avec $y(0) = -1$.

Exercice 18:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $-0,5y' + 2y = 0$ avec $y(0) = -8$.
2. $y' = 5y$ avec $y(0) = 12$.

Exercice 19:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $0,005y' + y = 0$ avec $y(0) = 1000$.
2. $y' - 15000y = 0$ avec $y(0) = 0,008$.

Exercice 20:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = 0$ avec $y(1) = 3$.
2. $10y' - y = 0$ avec $y(2) = -1$.

3.3 Solution particulière de $ay' + by = f$

Exercice 21:
Soient
$$(E_1): \quad y' + 100y = 200x^2 \quad \text{et} \quad (E_2): \quad 0,01y' - 10y = x$$
Soit $f(x) = 2x^2 - 0,04x + 0,0004$ et $g(x) = -0,1x - 0,0001$.

1. Montrer que f est une solution de (E_1).
2. Montrer que g est une solution de (E_2).

Exercice 22:
Soient
$$(E_1): \quad 2y' + y = \cos(x) \quad \text{et} \quad (E_2): \quad -3y' + y = e^x$$
Soit $f(x) = \frac{1}{5}\cos(x) + \frac{2}{5}\sin(x)$ et $g(x) = -\frac{1}{2}e^x$.

1. Montrer que f est une solution de (E_1).
2. Montrer que g est une solution de (E_2).

Exercice 23:
Soit $(E) : 5y' - 9y = 10$. Déterminer une solution particulière constante de (E).

Exercice 24:
Soit $(E) : -3y' + 2y = -6$. Déterminer une solution particulière constante de (E).

Exercice 25:
Soit $(E) : y' - y = -x + 3$. Déterminer une solution particulière affine de (E).

Exercice 26:
Soit $(E) : 2y' + 10y = x + 2$. Déterminer une solution particulière affine de (E).

3.4 Equations de la forme $ay' + by = f$

Exercice 27:
On considère $(E) : -2y' + y = 10$.

1. Déterminer une solution particulière constante de (E) qu'on notera y_p.
2. Donner (E_h) l'équation homogène associée à (E).
3. Résoudre (E_h). On notera y_h les solutions de (E_h).
4. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 28:
On considère $(E) : 2y' + 9y = 9x + 11$.

1. Déterminer une solution particulière affine de (E) qu'on notera y_p.
2. Donner (E_h) l'équation homogène associée à (E).
3. Résoudre (E_h). On notera y_h les solutions de (E_h).
4. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 29:
On considère $(E) : 3y' + y = x^2$.

1. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(x) = x^2 - 6x + 18$ est une solution particulière de (E).
2. Donner (E_h) l'équation homogène associée à (E).
3. Résoudre (E_h). On notera y_h les solutions de (E_h).
4. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 30:
On considère $(E) : y' - 3y = -e^{2x} + 6$.

1. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(x) = e^{2x} - 2$ est une solution particulière de (E).
2. Donner (E_h) l'équation homogène associée à (E).
3. Résoudre (E_h). On notera y_h les solutions de (E_h).
4. En déduire toutes les solutions de (E).

3.5 Equations de la forme $\mathbf{ay' + by = f}$ avec condition initiale

Exercice 31:
On considère $(E) : 500y' - 7y = 100$.

1. Déterminer une solution particulière constante de (E) qu'on notera y_p.
2. Donner (E_h) l'équation homogène associée à (E).
3. Résoudre (E_h). On notera y_h les solutions de (E_h).
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Trouver g la solution de (E) vérifiant $g(0) = 75$.

Exercice 32:
On considère $(E) : 2y' + 3y = x + 6$.

1. Déterminer une solution particulière affine de (E) qu'on notera y_p.
2. Donner (E_h) l'équation homogène associée à (E).
3. Résoudre (E_h). On notera y_h les solutions de (E_h).
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Trouver h la solution de (E) vérifiant $h(0) = 1$.

4 Equations différentielles d'ordre 2

4.1 Equation caractéristique

Exercice 33:
Donner l'équation caractéristique associée aux équations différentielles suivantes :

1. $4y'' - 5y' + y = 0$
2. $y'' + 2y' + y = 0$

Exercice 34:
Donner l'équation caractéristique associée aux équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y = 0$
2. $y'' + 5y' = 0$

4.2 Equations de la forme $\mathbf{ay'' + by' + cy = 0}$

Exercice 35:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' - 3y = 0$
2. $4y'' + 4y' + y = 0$

Exercice 36:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y = 0$
2. $4y'' + y = 0$

Exercice 37:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$
2. $y'' - 2y' + 5y = 0$

Exercice 38:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $10000y'' + 100y' - 6y = 0$
2. $y'' - 0,1y' + 0,0025y = 0$

Exercice 39:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 6y' + 13y = 0$
2. $y'' - 2y' + 26y = 0$

Exercice 40:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $0,1y'' - 0,02y' + 0,001y = 0$
2. $0,05y'' + 0,03y' - 0,0545y = 0$

4.3 Equations de la forme $\mathbf{ay'' + by' + cy = 0}$ avec conditions initiales

Exercice 41:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 9y' = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
2. $0,1y'' + y' - 7,5y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 42:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $6400y'' - 960y' + 11y = 0$ avec $y(0) = 0,1$ et $y'(0) = 0$.
2. $8y'' + 7y' - y = 0$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = -1$.

Exercice 43:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 10y' + 25y = 0$ avec $y(0) = 3$ et $y'(0) = 0$.
2. $16y'' - 8y' + y = 0$ avec $y(0) = 10$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 44:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $0,01y'' + 1,4y' + 49y = 0$ avec $y(0) = 10$ et $y'(0) = 20$.
2. $y'' - 0,04y' + 0,0004y = 0$ avec $y(0) = 10$ et $y'(0) = 100$.

Exercice 45:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 14y' + 74y = 0$ avec $y(0) = -3$ et $y'(0) = 5$.
2. $4y'' - 20y' + 26y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 46:
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 100y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
2. $y'' - 0,1y' + 16,0025y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.

4.4 Solution particulière de $\mathbf{ay'' + by' + cy = f}$

Exercice 47:
On considère l'équation différentielle (E) : $1020y'' - 630y' + 5y = 5x^2 - 1260x + 2065$.
Montrer que $f(x) = x^2 + 5$ est solution de (E).

Exercice 48:
On considère l'équation différentielle (E) : $3y'' + 7y' - 2y = 4e^{-3x}$.
Montrer que $f(x) = e^{-3x}$ est solution de (E).

Exercice 49:
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' - y = 3$.
Déterminer une solution particulière constante de (E).

Exercice 50:
On considère l'équation différentielle (E) : $2y'' - y' + 10y = 20x - 32$.
Déterminer une solution particulière affine de (E).

Exercice 51:
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 16y = 15\cos(x) - 15\sin(x)$.
Déterminer une solution particulière constante de (E) de la forme $f(x) = a\cos(x) - b\sin(x)$.

Exercice 52:
On considère l'équation différentielle (E) : $3y'' + 7y' = (-30x - 29)e^x$.
Déterminer une solution particulière constante de (E) de la forme $f(x) = (ax + b)e^x$.

4.5 Equations de la forme $\mathbf{ay'' + by' + cy = f}$

Exercice 53:
On consièdre l'équation différentielle (E) : $4y'' + 1,2y' + 0,09y = x$.

1. Montrer que $y_p(x) = \frac{100}{9}x - \frac{4000}{27}$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer (E_h), l'équation homogène associée à (E).
3. Résoudre (E_h).
4. En déduire les solutions de (E).

Exercice 54:
On consièdre l'équation différentielle (E) : $y'' - 7y' + 10y = 9e^{-x}$.

1. Montrer que $y_p(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer (E_h), l'équation homogène associée à (E).

3. Résoudre (E_h).

4. En déduire les solutions de (E).

Exercice 55:
On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 10y' + 50y = 5\cos(x) + \frac{49}{2}\sin(x)$.

1. Montrer que $y_p(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$ est une solution particulière de (E).

2. Déterminer (E_h), l'équation homogène associée à (E).

3. Résoudre (E_h).

4. En déduire les solutions de (E).

4.6 Equations de la forme $\mathbf{ay'' + by' + cy = f}$ avec conditions initiales

Exercice 56:
On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 6y' + 13y = 13x - 32$.

1. Trouver une solution particulière affine y_p de (E).

2. Déterminer (E_h), l'équation homogène associée à (E).

3. Résoudre (E_h).

4. En déduire les solutions de (E).

5. Trouver f, solution de (E) vérifiant $f(0) = -1$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 57:
On considère l'équation différentielle $(E) : 6y'' - 7y' - 5y = e^x$.

1. Trouver une solution particulière $y_p(x) = ke^x$ de (E) où k est à déterminer.

2. Déterminer (E_h), l'équation homogène associée à (E).

3. Résoudre (E_h).

4. En déduire les solutions de (E).

5. Trouver u, solution de (E) vérifiant $u(0) = -\frac{1}{6}$ et $u'(0) = 0$.

Exercice 58:
On considère l'équation différentielle $(E) : 100y'' + 60y' + 9y = (49x + 7)e^{-x}$.

1. Trouver une solution particulière $y_p(x) = (ax + b)e^{-x}$ de (E) où a et b sont à déterminer.

2. Déterminer (E_h), l'équation homogène associée à (E).

3. Résoudre (E_h).

4. En déduire les solutions de (E).

5. Trouver f, solution de (E) vérifiant $f(0) = 13$ et $f'(0) = 2$.

5 Problèmes

Problème 1:
L'entreprise Boisneuf fabrique des charpentes en bois. Elle souhaite étudier la déformation des poèces de bois qu'elle utilise pour ses charpentes lorsque celles-ci sont soumises à une charge constante. Le jour de l'installation, la poutre ne subit aucune déformation. On considère alors la fonction f, définie sur $[0; +\infty[$, représentant la déformation en millimètres de la poutre en fonction du temps t exprimé en jours à partir de l'installation.

1. Expliquer pourquoi $f(0) = 0$.

2. L'étude physique du phénomène de déformation (dans l'hypothèse où la pièce de bois étudiée ne présente pas de défaut de structure) montre que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \quad 400y' + 5y = 20$$

   (a) Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_h) : \quad 400y' + 5y = 0$$

   (b) Déterminer une solution y_p constante de l'équation différentielle (E).

   (c) Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).

   (d) Déterminer l'expression de la fonction f solution de (E), en vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$.

Problème 2:
Une start-up a trouvé une une bactérie qui permet de supprimer les toxines présentes dans une piscine. On admet que l'évolution du nombre de bactéries N (exprimé en millions) satisfait l'équation différentielle:

$$(E_1) : \quad y' = 1,032y$$

où y est une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ de la variable t.

1. Donner l'expression de N sachant qu'à l'instant $t = 0$, le nombre de bactéries qu'on met dans la piscine est de 120 millions.

2. Déterminer le temps (en heures) au bout duquel le nombre de bactéries a dounlé.

3. On admet que la quantité de toxines Q (exprimé en millilitres) satisfait l'équation différentielle :
$$(E_2): \quad y'' = 1,032y'$$
Déterminer l'expression de Q sachant que $Q(0) = 500$ et $Q'(0) = -12$.

4. On estime que le niveau de toxine est inoffensif pour l'homme lorsque sa quantité est inférieure à 2 millilitres. Au bout de combien de temps la quantité de toxine passera en dessous de 2 millilitres ?

Problème 3:
On étudie la variation de température en fonction du temps d'un conteneur réfrigéré contenant des vaccins. La température idéale est de 1°C et elle est maintenue grâce à un système de réfrigération. Lors d'un test, on étudie l'évolution de la température si le système tombe en panne.
T désigne la température en degrés Celsius des vaccins. La température extérieure est de 33°C. La fonction T vérifie l'équation différentielle :

$$(E): \quad 15905y' + y = 33$$

où y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de la variable t représentant le temps en minutes.

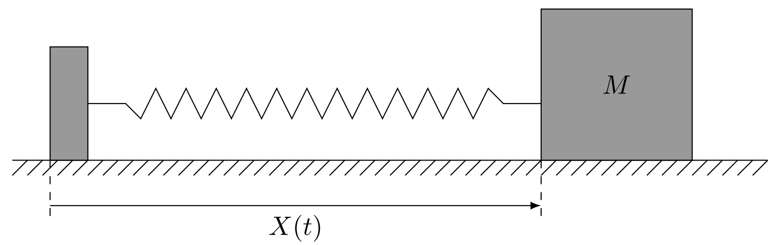
1. Déterminer une solution particulière constante de (E) que l'on notera y_p.
2. Déterminer l'équation différentielle homogène (E_h) associée à (E).
3. Donner l'expression des solutions de (E_h).
4. Déterminer les solutions de (E).
5. En déduire l'expression de T sachant que $T(0) = 1$. On rappelle que T est une solution de (E).
6. Quelle est la température 10 heures après la panne ? On arrondira à l'entier le plus proche.
7. Quelle est la température 2 jours après la panne ? On arrondira à l'entier le plus proche.
8. Le vaccin n'est plus utilisable si sa température dépasse 14°C. Déterminer à quel moment le vaccin n'est plus utilisable. On arrondira à la minute près.

Problème 4:
Un réservoir contient 1000 litres d'eau douce dont la salinité est de $0,12\ g.L^{-1}$.
A la suite d'un incident, de l'eau de mer pénètre dans le réservoir à raison de 10 litres par minute.
On s'intéresse à l'évolution au cours du temps de la salinité dans le réservoir. On note s cette salinité, s étant donc une fonction du temps t.
On admet que s est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad s' + 0,01s = 0,39$$

1. (a) Résoudre l'équation $(E_1): \quad s' + 0,01s = 0$.
   (b) Déterminer une fonction constante g solution de l'équation (E).
   (c) Résoudre l'équation (E).
2. A l'instant $t = 0$ où débute l'incident, la salinité de l'eau dans le réservoir était de $0,12\ g.L^{-1}$.
   Montrer que l'on alors $s(t) = 39 - 38,88\,e^{-0,01t}$.
3. Déduire du résultatprécédent la salinité de l'eau dans le réservoir au bout de 60 minutes.
4. De combien de temps le service d'intervention dispose-t'il pour colmater l'infiltration si la salinité doit rester inférieure à $3,9\,g.L^{-1}$?

Problème 5:
On fixe à l'extrémité d'un ressort horizontal un objet qui peut coulisser sans frottement sur un plan.



On repère l'objet par sa position X qui varie en fonction du temps t.
On admet que la fonction X est solution de l'équation

$$(E): \quad X'' + 100X = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution de l'équation (E) telle que $X(0) = 10^{-1}$ et $X'(0) = 0$.
3. On admet que si l'objet M frotte sur le plan, l'équation différentielle devient :
$$(E'): \quad X'' + X' + 100 = 0$$
   Résoudre de même (E'), avec les mêmes conditions initiales.
4. Représenter graphiquement les solutions de (E) et (E').