Chapitre 4 : Calcul matriciel

Table des matières

1 Matrices

1.1 Définitions

<u>**Définition :**</u>
Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
Une **matrice** $n \times p$ est un tableau à n lignes et p colonnes, que l'on note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \left(a_{ij}\right)_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$$

Le premier indice i désigne la ligne, le deuxième j la colonne.

<u>Exemple :</u>

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{5} & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×3 à deux lignes et trois colonnes.
- a_{23} est le coefficient situé à l'intersection de la $2^{ième}$ ligne et de la $3^{ième}$ colonne, il vaut 5.

<u>**Définition :**</u>
Soit A une matrice $n \times p$.

- Si $p = 1$, A est une **matrice colonne** : $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- Si $n = 1$, A est une **matrice ligne** : $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$
- Si $n = p$, A est une **matrice carrée**. Les coefficients a_{ii} sont appelés coefficients diagonaux :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- La matrice $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls s'appelle la **matrice nulle**.

<u>Exemple :</u>

- La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.
- La matrice $N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.
- La matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 21 & -3 \\ 1 & -1 & 6 \\ -4 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'orde 3.
- La matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nulle.

1.2 Matrices carrées particulières

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de taille n.

- Si $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$, A est appelée matrice **triangulaire supérieure** :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Si $a_{ij} = 0$ dès que $i < j$, A est appelée matrice **triangulaire inférieure** :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

- Si $a_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$, A est appelée **matrice diagonale** :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Si de plus les termes diagonaux sont tous égaux à 1, elle est appelée **matrice unité** :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Exemple :</u>

- Matrice triangulaire supérieure : $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
- Matrice triangulaire inférieure : $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$
- Matrice diagonale : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

<u>Propriété :</u>
Les matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de dimension $n \times p$ sont **égales** ssi $a_{ij} = b_{ij}$ pour tous i, j.

2 Opérations sur les matrices

2.1 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Propriété :
Si $A = \left(a_{ij}\right)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit λA comme étant la matrice $C = \left(c_{ij}\right)$ telle que :

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \text{pour tous } i, j$$

Il s'agit donc simplement de multiplier chaque terme de la matrice.

Exemple :
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$, on a alors :

$$-2A = \begin{pmatrix} -2 \times \frac{1}{2} & -2 \times 1 \\ -2 \times 0 & -2 \times -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

2.2 Somme de deux matrices de même taille

Propriété :
Si $A = \left(a_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$ sont deux matrices $n \times p$, on définit la somme $A + B$ comme étant la matrice $C = \left(c_{ij}\right)$ de taille $n \times p$ telle que :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{pour tous } i, j$$

Il s'agit donc simplement d'additionner les termes de même emplacement de chaque matrice.

Exemple :
Somme de deux matrices 2×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0-1 & -1-2 \\ 2-3 & 1-1 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

2.3 Multiplication de deux matrices

Propriété :
Soit $A = \left(a_{ij}\right)$ de taille $n \times p$ et $B = \left(b_{jk}\right)$ de taille $p \times q$, on définit le produit $A \times B$ (aussi noté AB) comme étant la matrice $C = \left(c_{ij}\right)$ définie par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq q$$

Remarque

Le produit n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

$$\overset{A}{3 \times 4} \qquad \overset{B}{4 \times 2}$$

OK !

$$\begin{array}{c} A \times B \\ 3 \times 2 \end{array}$$

$$\overset{B}{4 \times 2} \qquad \overset{A}{3 \times 4}$$

$\neq$

Dimensions incompatibles
pour la multiplication

Présentation du calcul :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \boxed{c_{12}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

On a donc :

$$c_{12} = 1 \times 1 + 2 \times 2 - 1 \times 3 = 2$$

On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

2.4 Inverse d'une matrice

Définition :
Une matrice carrée A est dite inversible s'il existe une matrice carrée C telle que :

$$A \times C = C \times A = I$$

où I est la matrice identité.
C est alors unique et est notée $C = A^{-1}$.

On se contentera en général d'utiliser la calculatrice ou un logiciel de calcul formel pour déterminer la matrice inverse d'une matrice donnée.

3 Application à la résolution de systèmes linéaires

Un système de n équations linéaires à n inconnues est de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

où les a_{ij} sont les coefficients du système, les x_i les inconnues et les b_i les termes constants.

Un tel système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$AX = B$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Propriété :
Un système d'équations de type $AX = B$, où A est une matrice carrée connue qui admet une matrice inverse A^{-1}, B une matrice colonne connue et X une matrice colonne d'inconnues peut être résolu par :

$$X = A^{-1} \times B$$

Exemple :
On considère le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 6x + 10y = 2 \\ 12x + 35y = 24 \end{cases}$$

On peut réécrire ce système sous forme matricielle $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 12 & 35 \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Avec un logiciel de calcul formel on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{9} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Ce système a donc pour solution $x = -\frac{17}{9}$ et $y = \frac{4}{3}$.