Chapitre 2 : Equations différentielles

Axel Carpentier

Brevet de technicien supérieur :

Enveloppe des bâtiments, conception et réalisation

Table des matières

Définition :

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation, dont l'inconnue est une fonction y de la variable t, de la forme

$$(E): \quad ay'(t) + by(t) = f(t)$$

où a et b sont des constantes réelles, et f est une fonction.

Exemple :

L'équation $y' - 2y = xe^x$ est une équation linéaire du premier ordre d'inconnue y de la variable x.

Solution générale de l'équation sans second membre

Soit :

$$(E_h) : \quad ay'(t) + by(t) = 0$$

Cette équation est appelée équation homogène associée à (E).
a étant un réel non nul, on peut encore écrire :

$$(E_h) : \quad y'(t) + \frac{b}{a}y(t) = 0$$

Propriété :

Les solutions de :

$$(E_h) : \quad y' + \frac{b}{a}y = 0$$

sont données par les fonctions :

$$y : t \mapsto Ce^{-\frac{b}{a}t} \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

Solution générale de l'équation sans second membre

Exemple :

On considère l'équation :

$$y' - 2y = 0$$

On a alors l'ensemble des fonctions solutions :

$$y(t) = Ce^{2t}$$

Solution particulière de l'équation différentielle (E)

Définition :

On appelle solution particulière de l'équation différentielle :

$$(E): \quad ay'(t) + by(t) = f(t)$$

toute fonction y vérifiant cette équation.

Solution particulière de l'équation différentielle (E)

Il existe plusieurs méthodes pour trouver une solution particulière :

- Cas où $f(t)$ est une constante :
  On recherche aussi y_p sous la forme d'une constante: $y_p(t) = C$.
- Cas où $f(t)$ est un polynôme :
  On recherche y_p sous la forme d'un polynôme de même degré.
- Cas où $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + B\sin(\omega t + \varphi)$:
  On recherche $y_p(t) = A'\cos(\omega t + \varphi) + B'\sin(\omega t + \varphi)$
- Cas où $f(t) = ke^{\lambda t}$:
  On recherche y_p sous la forme $y_p(t) = Ae^{\lambda t}$.

Exercice :
Montrer que $g(x) = xe^x$ est solution particulière de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = xe^x$$

Ensemble des solutions d'une équation différentielle

Théorème :

Les solutions d'une équation différentielle (E) sont de la forme :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

où y_h est la solution de l'équation sans second membre (E_h) et y_p une solution particulière de l'équation complète (E).

Exercice :

Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = xe^x$$

Unicité de la solution sous condition

Théorème :

Une équation différentielle linéaire du premier ordre a une solution unique vérifiant une condition initiale donnée.

Exercice :

Déterminer la solution f telle que $f(0) = 0$ de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = xe^x$$

Définition :

Une équation différentielle linéaire du second ordre est une équation, dont l'inconnue est une fonction y de la variable t, de la forme

$$(E): \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

où a, b et c sont des constantes réelles, et f est une fonction.

Exemple :

L'équation $y'' - 2y' + y = 8e^x$ est une équation linéaire du second ordre d'inconnue y de la variable x.

Solution générale de l'équation sans second membre

Théorème :

On considère l'équation homogène:

$$(E_h): \quad ay'' + by' + cy = 0$$

d'équation caractéristique associée :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Le tableau suivant donne les solutions de (E_h) en fonction du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Dans tous les cas, a et b sont des constantes réelles quelconque.

Solution générale de l'équation sans second membre

Théorème :

	Solutions de l'équation caractéristique associée	**Solution générale de $(\mathbf{E_h})$**
$\boldsymbol{\Delta > 0}$	2 racines réelles $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
$\boldsymbol{\Delta = 0}$	une racine double réelle $r = -\dfrac{b}{2a}$	$y(t) = (At+B)e^{rt}$
$\boldsymbol{\Delta < 0}$	2 racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ où $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$y(t) = e^{\alpha t}[A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)]$

Solution générale de l'équation sans second membre

Exemple :

- Résolution de l'équation différentielle :

$$(E_h) : \quad y'' + \omega^2 y = 0$$

- L'équation caractéristique de (E_h) est $r^2 + \omega^2 = 0$ de discriminant $\Delta = -4\omega^2 < 0$.
  Les solutions de cette équation sont $0 + i\omega$ et $0 - i\omega$.
- Les solutions de (E_h) sont du type
  $y_h(x) = e^{0\times x}[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)] = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$.

Solution générale de l'équation sans second membre

- Résolution de l'équation différentielle :

$$(E_h): \quad 2y'' - 5y' - 3y = 0$$

  - L'équation caractéristique de (E_h) est $2r^2 - 5r - 3 = 0$ de discriminant $\Delta = 49 > 0$.
    Les solutions de cette équation sont $r_1 = -\frac{1}{2}$ et $r_2 = 3$.
  - Les solutions de (E_h) sont donc du type $y_h(x) = Ae^{\frac{1}{2}x} + Be^{3x}$

Solution générale de l'équation sans second membre

- Résolution de l'équation différentielle :

$$(E_h) : \quad y'' - 2y' + y = 0$$

  - L'équation caractéristique de (E_h) est $r^2 - 2r + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = 0$.
    L'équation admet donc une solution double $r = 1$.
  - Les solutions de (E_0) sont donc du type $y_h(x) = (Ax + B)e^x$.

Solution particulière de l'équation différentielle (E)

Définition :

On appelle solution particulière de l'équation différentielle :

$$(E) : \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

toute fonction y vérifiant cette équation.

Exercice :

Montrer que $g(x) = 4x^2e^x$ est solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 8e^x$$

Théorème :

Les solutions d'une équation différentielle (E) sont de la forme :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

où y_h est la solution de l'équation sans second membre (E_h) et y_p une solution particulière de l'équation complète (E).

Exercice :

Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 8e^x$$

Unicité de la solution sous condition

Théorème :

Une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre (E) possède une unique solution vérifiant deux conditions initiales.

Exercice :

Déterminer la solution f telle que $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$ de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 8e^x$$