1 Matrices

Exercice 1:
Donner les dimensions des matrices suivantes ainsi que les coefficients a_{23}, b_{31}, c_{13} et d_{12} :

Exercice 2:
Une agence de voyage propre trois formules différentes pour découvrir l'Amazonie au départ de Manaus au Brésil. La première est une croisière de 5 jours sur le Rio Negro pour un tarif de 450 euros. La formule 2 propose de remonter l'Amazone pendant 10 jours au tarif de 850 euros. La 3ème formule permet de passer une semaine complète dans une réserve amérindienne pour un prix de 350 euros.

Représenter ces données par une matrice A dont on précisera les dimensions.

2 Opérations sur les matrices

2.1 Additions et soustractions de matrices

Exercice 3:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A + B$.
2. Calculer $A - B$.

Exercice 4:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 9 \\ 3 & -4 & -7 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Donner les dimensions des matrices A et B.
2. Calculer $A + B$.
3. Calculer $A - B$.

2.2 Multiplication d'une matrice par un réel

Exercice 5:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $4A$.
2. Calculer $3B$.
3. En déduire $4A - 3B$.

Exercice 6:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $3(A + B)$.
2. Calculer $3A + 3B$.

Exercice 7:
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -7 \\ -5 & -2 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $2A$ puis $5A$.
2. Calculer $7A$.

2.3 Multiplications de matrices

Exercice 8:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1. Donner les dimensions des matrices A et B.
2. Donner les dimensions de la matrice produit $A \times B$.
3. Calculer le produit $A \times B$.
4. Donner les dimensions de la matrice produit $B \times A$.
5. Calculer le produit $B \times A$.

Exercice 9:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1. Donner les dimensions des matrices A et B.
2. Donner les dimensions de la matrice produit $A \times B$.
3. Calculer le produit $A \times B$.

Exercice 10:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Donner les dimensions de la matrice produit $A \times B$.
2. Calculer le produit $A \times B$.

Exercice 11:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit $A \times B$.
2. Calculer le produit $B \times A$.

Exercice 12:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit $A \times B$.
2. Calculer le produit $B \times A$.

Exercice 13:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice $C = A + B$.
2. Calculer A^2, B^2 et C^2.
3. Calculer le produit $A \times B$.
4. Calculer $D = A^2 + 2(A \times B) + B^2$.
5. Calculer $E = A^2 + A \times B + B \times A + B^2$.

Exercice 14:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 4 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3a-1 & \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner les dimensions des matrices A et B.
2. Donner les dimensions de la matrice produit $A \times B$.
3. Calculer le produit $A \times B$ à l'aide de la calculatrice.
4. Est-il possible de calculer le produit $B \times A$.

Exercice 15:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 4 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Donner les dimensions de la matrice produit $A \times B$.
2. Calculer, à l'aide de la calculatrice, le produit $A \times B$.
3. Calculer, à l'aide de la calculatrice, le produit $B \times A$.

Exercice 16:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Est-il possible de calculer A^2 ?
2. Calculer B^2.
3. Calculer B^3.

Exercice 17:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer, à l'aide de la calculatrice, le produit $A \times B$ puis $B \times A$.
2. Calculer le produit $C \times D$ puis $D \times C$.
3. Calculer A^2.
4. En déduire A^3.
5. Calculer B^3.

2.4 Inverse de matrices

Exercice 18:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$.
Vérifier si les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 19:
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier si les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre.
2. La matrice A est-elle sa propre inverse ?
3. La matrice B est-elle sa propre inverse ?

Exercice 20:

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.
A l'aide de la calculatrice, vérifier si les matrices sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 21:

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
A l'aide de la calculatrice, vérifier si les matrices sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 22:

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. A l'aide de la calculatrice, calculer A^{-1}, l'inverse de la matrice A.
2. A l'aide de la calculatrice, calculer le produit $A \times A^{-1}$ puis les produit $A^{-1} \times A$.

Exercice 23:

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & -6 \end{pmatrix}$.

1. A l'aide de la calculatrice, calculer A^{-1}, l'inverse de la matrice A.
2. A l'aide de la calculatrice, calculer le produit $A \times A^{-1}$ puis les produit $A^{-1} \times A$.

Exercice 24:

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.
A l'aide de la calculatrice, calculker A^{-1}, si elle existe.

Exercice 25:

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
A l'aide de la calculatrice, calculker A^{-1}, si elle existe.

Exercice 26:

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
A l'aide de la calculatrice, calculker A^{-1}, si elle existe.

Exercice 27:

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. A l'aide de la calculatrice, calculer A^{-1}, si elle existe.
2. En déduire l'inverse de la matrice B.
3. La matrice C possède-t-elle un inverse ?

3 Résolution de système

Exercice 28:

On considère le système $\begin{cases} 3x + 2y = 63 \\ x + 4y = 51 \end{cases}$.

1. Représenter le système d'équations par une équation matricielle $AX = B$, en précisant les matrices A, X et B.
2. Déterminer la matrice inverse de A.
3. En déduire les solutions du système.

Exercice 29:

On considère le système $\begin{cases} x + 3y + 4z = 50 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31 \end{cases}$.

1. Représenter le système d'équations par une équation matricielle $AX = B$, en précisant les matrices A, X et B.
2. Déterminer la matrice inverse de A.
3. En déduire les solutions du système.

Exercice 30:

On considère le système $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ -x + y + z = 5 \end{cases}$.
Résoudre le système par la résolution de l'équation matricielle $AX = B$.

Exercice 31:

Des circuits électriques sont fabriqués à partir de 2 composants qui consomment une certaine puissance (en W).

- Un circuit constitué de 3 composants de type 1 et 2 composants de type 2 consomme 630 W.

- Un circuit constitué de 1 composant de type 1 et 4 composants de type 2 consomme 510 W.

On note x, y les puissances inconnues des composants de types 1 et de types 2.

1. Ecrire le système de 2 équations que vérifient les 2 puissances inconnues x et y.
2. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
   Représenter le système d'équations par une équation matricielle $AX = B$, en précisant les matrices X et B.
3. Résoudre le système à l'aide de calculatrice. En déduire la puissance de chacun des composants.

4 Problèmes

Problème 1:
Un fabricant de sandwich industriels élabore sa gamme de produits (sandwichs santé, classique et grosse faim) à partir des produits : pain, légumes, viande, sauce.
Les quantités nécessaires (en tranches de pain et en centaines de grammes) sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

	Santé	**Classique**	**Grosse faim**
Pain	2	2	3
Légumes	3	2	1
Viande	0	$1,5$	4
Sauce	$0,1$	$0,2$	$0,5$

L'interprétation du tableau est la suivante : pour faire un sandwich classique, il faut 2 tranches de pain, 200 g de légumes, 150 g de viande et 20 g de sauce.

Pour une tranche de pain et 100 grammes de légumes, viande et sauce, on résume dans ce tableau les valeurs caloriques et le prix.

	Pain	**Légumes**	**Viande**	**Sauce**
Calories	20	20	250	600
Prix	$0,1$	$0,05$	$1,5$	$0,75$

L'intepréation du tableau est la suivante : une tranche de pain représente 20 calories et coûte $0,1$ euro, 100 g de viande représentent 250 calories et coûtent 1,5 euros.

Ces données sont représentées par ces matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1,5 & 4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 250 & 600 \\ 0,1 & 0,05 & 1,5 & 0,75 \end{pmatrix}$$

1. (a) Un seul des produits $A \times B$ ou $B \times A$ est possible. Lequel ? Justifier.
   (b) Effectuer ce produit et interpréter la première ligne de son résultat dans le contexte de l'énoncé.
2. L'entreprise doit livrer 100 sandwichs santé, 300 classiques et 50 sandwichs grosse faim.
   On représente cette commande par la matrice $C = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \\ 50 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le produit $A \times C$ et l'interpréter dans le contexte de l'énoncé.
   (b) L'entreprise possède en stock 1000 tranches de pain, 100 kg de légumes, 50 kg de viande et 10 kg de sauce. Pourra-t-elle honorer la commande ?

Problème 2:
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer à l'aide de la calculatrice que $A^2 = A + 2I$.
   (b) En déduire que $\frac{1}{2}(A^2 - A) = I$.
   (c) En remarquant que $A = A \times I$, en déduire que $A \times \frac{1}{2}(A - I) = I$.
   (d) En déduire la matrice inverse de A.
2. (a) Calculer B^2.
   (b) Trouver x et y tel que $B^2 = xB + yI$.
   (c) En déduire la matrice inverse de B.
3. (a) Calculer C^2.
   (b) Exprimer x et y en fonction de a tel que $C^2 = xC + yI$.
   (c) En déduire l'expression de la matrice inverse de C et sa condition d'existence.