Exercice 1 : *La Réunion, 2022, STI2D*

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(x).$$

   (a) On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

   (b) Montrer que la fonction g admet un minimum, dont on précisera la valeur exacte, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. (a) Montrer, en détaillant vos calculs, que:

$$\ln(2025) = 4\ln(3) + 2\ln(5).$$

   (b) Simplifier le nombre A ci-dessous en détaillant les calculs:

$$A = 2\ln\left(\mathrm{e}^4\right) - 3\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

Solution :

Exercice 2 : *Métropole, 2021, STI2D*

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln(x) - x + 4$$

1. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, et on note g' sa fonction dérivée.
   Montrer que pourtout réel x del'intervalle $]0;+\infty[$, $g'(x) = \ln(x)$.

2. En déduire le sens de variation de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Solution :

Exercice 3 : *La Réunion, 2021, STI2D*

1. On considère la fonction h définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \ln(2x+1)$.

   On désigne par $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O et d'unité graphique 1 cm.

   On note $M(x\ ;\ y)$ un point de la courbe $\mathcal{C}_h$. On suppose que l'ordonnée y du point M est supérieure à 15 cm.

Affirmation 2 : "L'abscisse x du point M se situe à plus de 16 km du point O."

2. Le thorium 231 est un élément radioactif qui se désintègre selon la loi:

   $$N(t) = N(0)e^{-0{,}027t}$$

   où $N(0)$ est le nombre de noyaux au début de l'observation et $N(t)$ le nombre de noyaux à l'instant t exprimé en heure.

   La demi-vie d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la moitié de ses noyaux se sont désintégrés.

Affirmation 3 : " La demi-vie du thorium 231 est d'environ 11 heures. "

Solution :