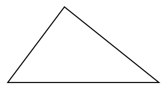
Chapitre 2 : Configurations géométriques

Table des matières

1 Périmètres, aires et volumes

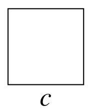
1.1 Formules usuelles de calcul de périmètres et d'aires

- **Triangle:**



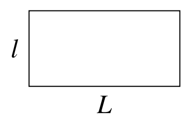
- Périmètre : $\mathcal{P}_{triangle}$ = somme des longueurs
- Aire : $\mathcal{A}_{triangle} = \dfrac{\text{Côté} \times \text{Hauteur relative à ce côté}}{2}$

- **Carré:**



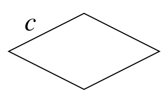
- Périmètre : $\mathcal{P}_{carré} = 4 \times c$
- Aire : $\mathcal{A}_{carré} = c^2$

- **Rectangle:**



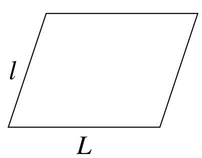
- Périmètre : $\mathcal{P}_{rectangle} = 2 \times (L + l)$
- Aire : $\mathcal{A}_{rectangle} = L \times l$

- **Losange:**



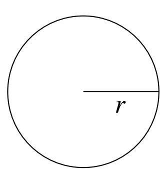
- Périmètre : $\mathcal{P}_{losange} = 4 \times c$
- Aire : $\mathcal{A}_{losange} = \dfrac{\text{Grande diagonale} \times \text{Petite diagonale}}{2}$

- **Parallélogramme:**



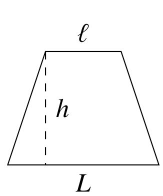
- Périmètre : $\mathcal{P}_{parallélogramme} = 2 \times (L + l)$
- Aire : $\mathcal{A}_{parallélogramme}$ = Côté×Hauteur relative à ce côté

- **Cercle:**



- Périmètre : $\mathcal{P}_{cercle} = 2 \times \pi \times r$
- Aire : $\mathcal{A}_{cercle} = \pi \times r^2$

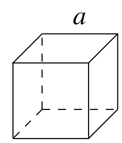
- **Trapèze:**



- Périmètre : $\mathcal{P}_{trapèze}$ = somme des longueurs
- Aire : $\mathcal{A}_{trapèze} = \dfrac{(\ell + L) \times h}{2}$

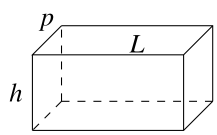
1.2 Formules usuelles de calcul de volumes

- **Cube:**



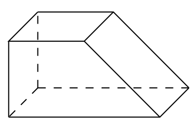
– <u>Volume</u> : $\mathcal{V}_{cube} = a^3$

- **Pavé droit:**



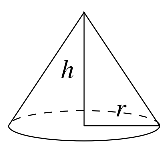
– <u>Volume</u> : $\mathcal{V}_{pavé} = L \times h \times p$

- **Prisme droite:**



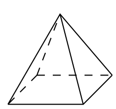
– <u>Volume</u> : $\mathcal{V}_{prisme} = \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$

- **Cône:**



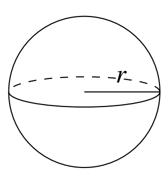
– <u>Volume</u> : $\mathcal{V}_{cône} = \dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$

- **Pyramide:**



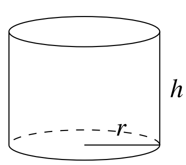
– <u>Volume</u> : $\mathcal{V}_{pyramide} = \dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$

- **Boule:**



– <u>Volume</u> : $\mathcal{V}_{boule} = \dfrac{4 \times \pi \times r^3}{3}$

- **Cylindre:**



– <u>Volume</u> : $\mathcal{V}_{cylindre} = \pi \times r^2 \times h$

Exercice:

1. Calculer le volume d'une sphère de rayon 5cm.
2. Calculer le volume d'une boule de rayon 3cm.
3. Calculer le volume d'un cylindre de rayon 5cm et de hauteur 4cm.

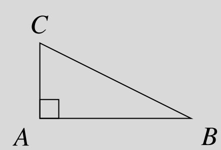
2 Géométrie du triangle

2.1 Outils élémentaires

2.1.1 Théorème de Pythagore

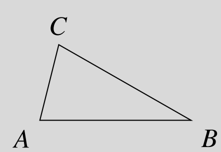
Théorème:

- **Sens direct:** Dans un triangle ABC rectangle en A comme suit :



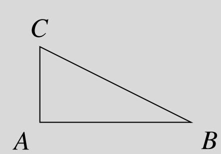
On a $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

- **Contraposée:** Dans un triangle ABC de plus grand côté BC comme suit :



Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

- **Réciproque:** Dans un triangle ABC de plus grand côté BC comme suit :



Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est pas rectangle en A.

Exercice:

1. Soit un triangle ABC rectangle en B tel que $AC = 5$ et $AB = 2$. Calculer BC.
2. Le triangle ABC tel que $AC = 7$, $AB = 6$ et $BC = 3$ est-il rectangle ? Si oui, en quel point ?

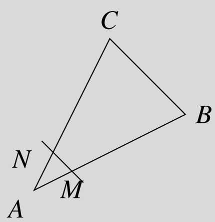
2.1.2 Théorème de Thalès

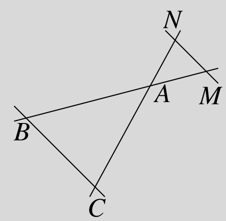
Théorème:

- **Sens direct:** Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A. Si $(MN)//(BC)$, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

- **Contraposée:** Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A. Si les deux premiers quotients de l'égalité ne sont pas égaux, alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.
- **Réciproque:** Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A. Si les deux premiers quotients de l'égalité sont égaux, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



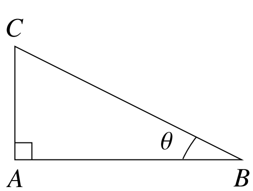


Exercice:

1. Soient (BM) et (CN) deux droites se coupant en A. On suppose que les droites (MN) et (BC) sont parallèles et $AM = 4$, $AN = 3$, $AB = 1$ et $BC = 5$. Calculer les longueurs AC et MN.
2. Soient (BM) et (CN) deux droites se coupant en A. On suppose que $MN = 3$, $AB = 12$, $BC = 6$, $AB = 4$. Les droites (BM) et (CN) sont-elles parallèles ?

2.1.3 Trigonométrie

Dans un triangle rectangle, les trois relations trigonométriques relient les cosinus, sinus et tangente d'un angle du triangle, aux côtés du triangle.



- $\cos(\theta) = \dfrac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$
- $\sin(\theta) = \dfrac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$
- $\tan(\theta) = \dfrac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \dfrac{AC}{AB}$

Exercice:
Soit un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 3$.

1. Déterminer la valeur exacte puis approchée à $10^{-1\circ}$ de l'angle $\theta = \widehat{ABC}$.
2. En déduire la valeur exacte puis approchée à 10^{-1} de BC.

2.2 Outils avancés

2.2.1 Loi des sinus

Théorème:

Soit ABC un triangle quelconque. On note : $\begin{cases} a = BC & b = CA & c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} & \hat{B} = \widehat{ABC} & \hat{C} = \widehat{BCA} \end{cases}$

On a alors :

$$\frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c}$$

Exercice:

1. Soit ABC un triangle tel que $AC = 4,09$, $BC = 13,26$ et $\hat{C} = 50°$. Calculer $\hat{A}$ à $10^{-2\circ}$ près.
2. Soit ABC un triangle tel que $AB = 7,8$, $BC = 6,9$ et $\hat{B} = 51°$. Calculer $\hat{C}$ à $10^{-2\circ}$ près.

2.2.2 Théorème d'Al-Kashi

Théorème:

Soit ABC un triangle quelconque. On note : $\begin{cases} a = BC & b = CA & c = AB \\ \hat{A} = \widehat{BAC} & \hat{B} = \widehat{ABC} & \hat{C} = \widehat{BCA} \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}) \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\hat{B}) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C}) \end{cases}$

Démonstration:
En effet :
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
$\Longrightarrow \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA}\|^2 + 2 < \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} > + \|\overrightarrow{AC}\|^2$
$\Longrightarrow BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2 < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} >$
$\Longrightarrow BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
$\Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$

Exercice:
Soit ABC un triangle tel que $AC = 4,09$, $BC = 13,26$ et $\hat{A} = 113,63°$.

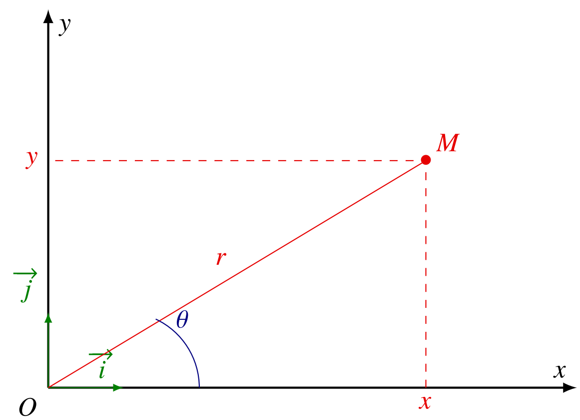
1. Montrer que $AB \simeq 11,08$
2. En déduire la valeur approchée à $10^{-2}°$ près de la mesure en degrés de l'angle $\hat{A}$.

3 Repérage

3.1 Repérage d'un point dans le plan

Dans le plan, muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ )$ direct, tout point M peut être repéré par :

- **Les coordonnées cartésiennes** $(x; y)$ avec x et y tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- **Les coordonnées polaires** $(r; \theta)$ avec $r = OM$ et $\theta = (\ \vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\ )$



Remarque

- En connaissance des coordonnées cartésiennes d'un point $(x; y)$, on peut déterminer ses coordonnées polaires $(r; \theta)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$.
- En connaissance des coordonnées polaires d'un point $(r; \theta)$, on peut déterminer ses coordonnées cartésiennes $(x; y)$ avec $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.

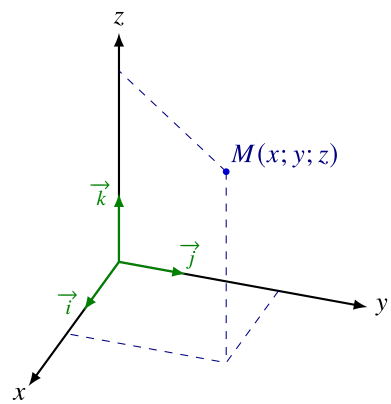
Exercice:

1. On considère le point $A(3; 3)$ dans le plan. Déterminer ses coordonnées polaires $(r_A; \theta_A)$.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point $C\left(3; \frac{2\pi}{3}\right)$.

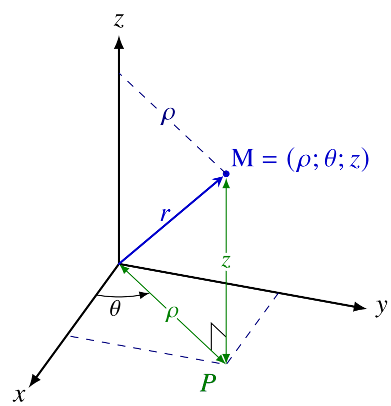
3.2 Repérage d'un point dans l'espace

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\,)$ direct, tout point M peut être repéré par :

- **Les coordonnées cartésiennes** $(x; y; z)$ avec x, y et z tels que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.

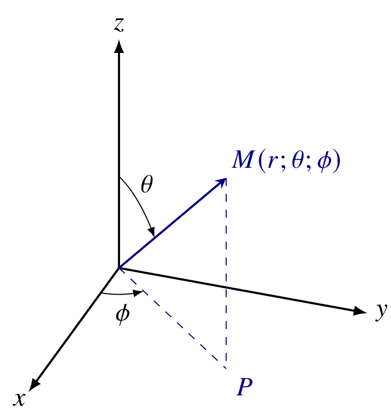


- **Les coordonnées cylindriques** $(\rho; \theta; z)$ avec $\rho = OP$ et $\theta = (\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{OP}\,)$.



On a alors $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$

- **Les coordonnées sphériques** $(r; \theta; \phi)$ avec $r = OM$, la longitude $\theta = (\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{OP}\,) \in [0; 2\pi[$ et la latitude $\phi = (\,\overrightarrow{OP}\,;\,\overrightarrow{OM}\,)$ et $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



On a alors $\begin{cases} x = \rho\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = \quad\rho\cos(\theta \end{cases}$

! Remarque

- En connaissance des coordonnées cartésiennes d'un point $(x; y; z)$, on peut déterminer ses coordonnées cylindriques $(r; \theta; z)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$.
- En connaissance des coordonnées cartésiennes d'un point $(x; y; z)$, on peut déterminer ses coordonnées sphériques $(r; \theta; \phi)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $\sin(\phi) = \frac{z}{r}$ et $\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Exercice:
On considère le point $A(0; 2\sqrt{3}; -2)$ dans l'espace. Déterminer ses coordonnées sphériques $(r_A; \theta_A; \phi_A)$.