Chapitre 4 : Calcul intégral

Table des matières

1 Primitives

1.1 Définitions

Définition:
Soit F une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f lorsque F est dérivable sur I et que $F' = f$.

Remarque

Il n'y a pas unicité d'une primitive.

Exemple:

- Une primitive de $f : x \mapsto 3x^2 + 2x + 8$ est donné par $F : x \mapsto x^3 + x^2 + 8x$. En effet on a bien $F' = f$.
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sqrt{x^2+3} + \pi$ est une primitive de f.

Théorème:
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Démonstration: *(Hors programme)*
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
Soit F une fonction définie sur I s'annulant en $\alpha \in I$. On pose $\forall x \in I, F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$. Montrons que F est une primitive de f. C'est-à-dire que l'on cherche à montrer que $F' = f$.
On a, pour tout $x \in I$ et $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt\right| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \\ &\leq \epsilon \end{aligned} \tag{1}$$

C'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) = f(x)$. D'où le résultat.

Propriété:
Soit F une primitive d'une fonction f définies sur I. Les primitives de f sont données par les fonctions $G = F + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration:
On a d'une part que G est bien dérivable est I et $G' = F' + 0 = f$ donc G est bien une primitive de f.
Par ailleurs, si on définit $H = G - F$, H est dérivable et on a pour tout $x \in I$, $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $H(x) = k$. D'où le résultat.

Propriété:
Soit f une fonction admettant des primitives sur I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration:
On a d'une part que G est bien dérivable est I et $G' = F' + 0 = f$ donc G est bien une primitive de f.
Par ailleurs, si on définit $H = G - F$, H est dérivable et on a pour tout $x \in I$, $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $H(x) = k$. D'où le résultat.
Exercice:
Vérifier que $F : x \mapsto \frac{5}{2}x^2 + 3x - 2$ avec $F(1) = \frac{7}{2}$. est l'unique primitive de $f : x \mapsto 5x + 3$.

1.2 Calcul de primitives

L'objet de ce paragraphe est de présenter quelques techniques simples permettant l'obtention de primitives de fonctions données sur un intervalle déterminé.

1.2.1 Primitives de fonctions usuelles

A l'aide du tableau des dérivées des fonctions de références, on en déduit les primitives suivantes.

	Fonction f	**Primitive F**
Constante	$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = ax$ sur $I = \mathbb{R}$
Puissance	$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $I = \mathbb{R}$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}^*$	$F(x) = \ln(x)$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$
Puissance inverse	$f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n > 1$ sur $I = \mathbb{R}^*$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$
Cosinus	$f(x) = \cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
Sinus	$f(x) = \sin(x)$ sur $I = \mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$
Exponentielle	$f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$	$F(x) = e^x$ sur $I = \mathbb{R}$

! Remarque

Pour obtenir toutes les primitives d'une fonction f donnée, il suffit de rajouter une constante.

1.2.2 Opérations sur les primitives

Propriété:

- Soit F et G des primitives respectives de f et g sur I. $F + G$ est alors une primitive de $f + g$.
- Soit F une primitive de f sur I et $\alpha \in \mathbb{R}$. αF est alors une primitive de αf.

Démonstration:

- On a $(F+G)' = F' + G' = f + g$, d'où le résultat.
- On a $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f$, d'où le résultat.

Remarque

Contrairement à la dérivation, il n'existe pas de formule permettant de trouver directement une primitive d'un produit ou d'un quotient de fonctions.

Exemple:

Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f : x \mapsto x^2 - \dfrac{3}{x}$ est donnée par $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - 3\ln(x)$

Exercice:
Déterminer la primitive F de $f(x) = x^3 + \cos(x)$ avec $f(\pi) = 0$.

Soit $u : I \longrightarrow J$ une fonction dérivable de dérivée u' et $v : J \mapsto K$

Fonction f	**Primitive** F
$f = u'u$	$F = \dfrac{u^2}{2}$
$f = u'u^n$	$F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$f = u'e^u$	$F = e^u$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln(u)$ si $J \subset \mathbb{R}_+^*$
$f = \dfrac{u'}{u^n}, n \geq 2$	$F = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$f = u'e^u$	$F = e^u$
$f = u'\cos(u)$	$F = \sin(u)$
$f = u'\sin(u)$	$F = -\cos(u)$
$f = u' \times (v' \circ u)$	$F = v \circ u$

Exercice:
Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto xe^{1-x^2}$ telle que $F(1) = 0$.

2 Intégrale d'une fonction

2.1 Définition

<u>Définition:</u>
On appelle intégrale de f sur $[\ a\ ;\ b\ ]$ le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I. Il est noté

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Remarque

La variable x est dite muette, elle n'intervient pas dans le résultat. On peut donc utiliser n'importe quelle lettre.
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$

<u>Exercice:</u>
Calculer l'intégrale $\int_2^3 x\ dx$.

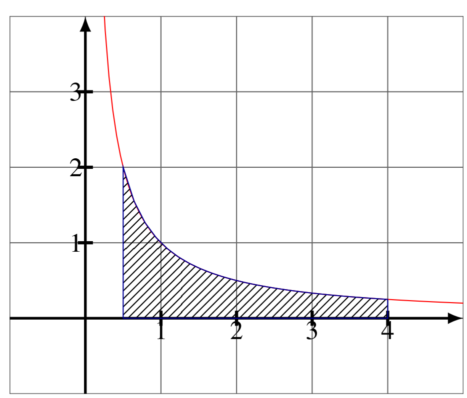
2.2 Interprétation graphique : calcul d'aire

2.2.1 Aire d'une fonction positive

<u>Définition:</u>
Si f est une fonction positive sur $[\ a\ ;\ b\ ]$, alors $\int_a^b f(x)\ dx$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abcsisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

<u>Exercice:</u>

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 4$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.



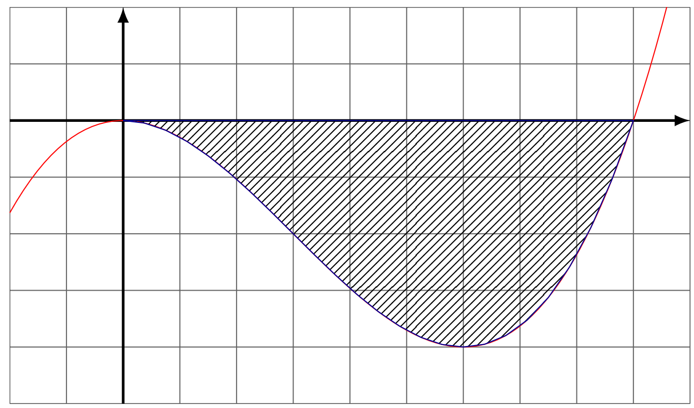
2.2.2 Aire d'une fonction négative

Définition:

Si f est une fonction négative sur $[\ a\ ;\ b\ ]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ est égal à l'opposée de l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abcsisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ exprimée en unité d'aire.

Exercice:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = \dfrac{x^3}{27} - \dfrac{x^2}{3}$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 9$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique 1 cm.

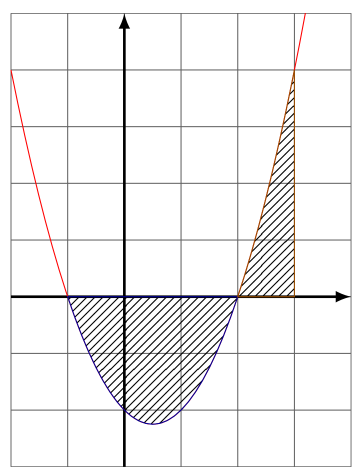


2.2.3 Aire d'une fonction quelconque : découpage d'aire

Pour calculer l'aire d'un domaine définie par une fonction changeant de signe, il faut découper l'intervalle en plusieurs intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant.

Exercice:

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $y = x^2 - x - 2$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique 1 cm.



3 Propriétés de l'intégrale

3.1 Relation de Chasles

Propriété: *Relation de Chasles*
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour tous $a, b, c \in I$ on a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Démonstration:

$$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Exercice:

Soit f définie pour tout $x \in [-2;4]$ par $\begin{cases} x \text{ si } x \in [-2;1] \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x \in [1;4] \end{cases}$. Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)dx$.

3.2 Linéarité

Proposition:
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

Démonstration:

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Exercice:

Soit f une fonction telle que $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx = 2$. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{3}{2}f(x) + x dx$.

3.3 Inégalités

Propriété:

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ alors on a $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Démonstration:
Soit F une primitive de f sur $[a;b]$. On a que $F' = f \geq 0$. F est donc croissante sur $[a;b]$ et donc on a en particulier $F(a) \leq F(b) \iff F(b) - F(a) \geq 0$. D'où le résultat.

Corollaire:

Soit f, g deux fonctions continues sur $[a;b]$. Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$. Alors on a $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Démonstration:
On pose la fonction $h = g - f$ et on conclut d'après la propriété précédente.

Exercice:

Démontrer que $\frac{8}{9} \leq \int_0^8 \frac{dx}{1+x} \leq 8$.

3.4 Valeur moyenne

Définition:
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ non trivial. On appelle valeur moyenne de f la quantité :

$$\mu_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Exercice:
Calculer la valeur moyenne de $f : x \mapsto (2-x)(x-1)$ sur $[-1;0]$.

4 Méthode d'intégration

4.1 Intégration par partie

Propriété:
Soit u, v deux fonctions dérivables de dérivées continues sur $[a; b]$.

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)$$

Démonstration:

$$\forall x \in [a; b], (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \implies \int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx \quad \text{d'où le résultat}$$

Exemple:

On désire calculer l'intégrale $I = \int_0^1 xe^x \, dx$.

- On pose $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.
- Donc : $\int_0^1 xe^x \, dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = (1e^1 - 0\, e^0) - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1$.

4.2 Changement de variable

4.2.1 Changement de variable du type $x \to x + \beta$

Propriété:
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle du type $[a + \beta, b + \beta]$ où a, b et $\beta \in$ avec $a \leq b$, alors

$$\int_a^b f(x + \beta)\, dx = \int_{a+\beta}^{b+\beta} f(t)\, dt$$

Exemple:

On se propose de calculer l'intégrale $I = \int_{-3}^{-2} (x + 3)^2 \, dx$.

- On peut faire le calcul directement en remarquant qu'une primitive de $(x + 3)^2$ sur $[-3\, , -2\,]$ est $\frac{1}{3}(x + 3)^3$.
- On peut également effectuer une translation de manière à effectuer un calcul plus simple :
  $I = \int_{-3}^{-2} (x + 3)^2 \, dx = \int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

4.2.2 Changement de variable du type $x \to \alpha x$ lorsque $\alpha \neq 0$

Propriété:
Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[\ \alpha a\ ,\ \alpha b\ ]$, où $\alpha \neq 0$, alors

$$\int_a^b f(\alpha x)\ dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a}^{\alpha b} f(x)\ dx$$

Exemple:

On se propose de calculer $I = \displaystyle\int_0^1 e^{2x}\ dx$:

- $I = \displaystyle\int_0^1 e^{2x}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^t\ dt = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$.

4.2.3 Cas général : changement de variable du type $x \to \varphi(x)$

Propriété:
Soit φ une fonction dérivable sur un intervalle $I = [\ a\ ,\ b\ ]$ dont la dérivée est dérivable sur I.
Pour toute fonction f définie et continue sur l'intervalle $f(I)$, on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\ dt.$$

Exemple:

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ en posant $t = \sqrt{x}$, ce qui équivaut à $x = t^2 = \varphi(t)$:

- On calcule les nouvelles bornes d'intégration :
  Pour $x \in [\ 1\ ,\ 4\ ]$, on obtient $t \in [\ 1\ ,\ 2\ ]$
- On exprime l'expression à intégrer par rapport à la nouvelle variable : on a
  $\displaystyle\frac{1}{x+\sqrt{x}}\ dx = \frac{1}{\varphi(t)+\sqrt{\varphi(t)}}\varphi'(t)\ dt = \frac{1}{t^2+t}\times 2t\ dt.$
- donc : $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{2t\ dt}{t^2+t}$

$$= 2\int_1^2 \frac{1}{t+1}\ dt$$

$$= 2\left[\ \ln(1+t)\ \right]_1^2$$

$$= 2(\ln 3 - \ln 2)$$

$$= 2\ln\left(\tfrac{3}{2}\right).$$