Chapitre 6 : Calcul vectoriel

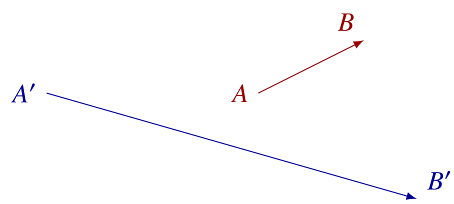
Table des matières

1 Vecteurs de l'espace

Définition:
On appelle vecteur $\overrightarrow{u}$ un segment orienté caractérisé par:

- Sa direction (orientation de la droite).
- Son sens (direction de la flèche).
- Sa norme (longueur du segment noté $||\overrightarrow{u}||$).

Il est également possible de définir un vecteur dans le plan par les mêmes critères.



Définition: *Somme de vecteurs*
On considère deux translations définies par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Faire succesivement ces deux translations revient à effectuer une seule translation définie par le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Définition: *Multiplication par un réel*
Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ et un réel k, multiplier un vecteur par un scalaire revient à effectuer plusieurs translations successives.

- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $k = 0$ alors $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $k > 0$ alors la direction est la même que $\overrightarrow{u}$ et la norme est $k||\overrightarrow{u}||$.
- Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $k < 0$ alors la direction est l'opposé de $\overrightarrow{u}$ et la norme est $-k||\overrightarrow{u}||$.

Propriété: *Relation de Chasles*

Soient A,B et C trois points quelconques de l'espace, on a la relation suivante : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Démonstration : *(Hors programme)*
Par définition on a que $\overrightarrow{AC}$ est l'unique vecteur tel que $C = A + \overrightarrow{AC}$.
Par ailleurs $\overrightarrow{AB}$ l'unique vecteur tel que $B = A + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ l'unique vecteur tel que $C = B + \overrightarrow{BC}$.
On a donc $C = B + \overrightarrow{BC} = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = A + \overrightarrow{AC}$.
On a donc le résultat par unicité.

Propriété:
Soient k,k' deux réels et $\overrightarrow{u}$,$\overrightarrow{v}$ deux vecteurs quelconques, on a les relation suivante :

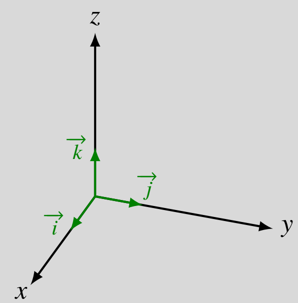
- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$
- $k(k'\overrightarrow{u}) = (kk')\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Démonstration: *(Hors programme)*
Immédiat par définition d'un espace vectoriel.

2 Repère vectoriel et coordonnées

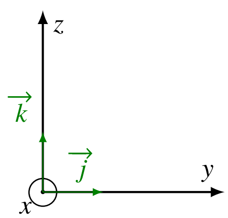
2.1 Repère vectoriel

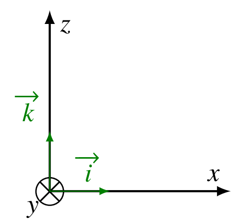
Définition:
On appelle repère de l'espace la donnée de 3 vecteurs non coplanaires $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.



Remarque

En physique et en mécanique, il est souvent possible de simplifier des situations en se ramenant à l'étude de vecteurs dans le plan. On représentera le repère comme suit :



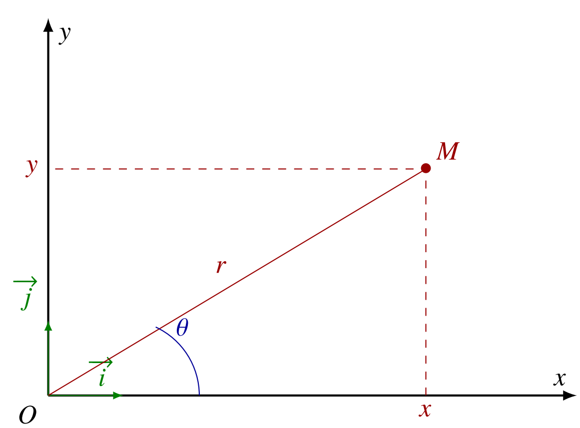


Les notations $\odot$ et $\otimes$ signifient respectivement que l'axe est dirigé "vers nous" ou "vers le mur".

2.2 Coordonnées dans un repère

2.2.1 Repérage d'un point dans le plan

Dans le plan, muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ )$ direct, tout point M peut être repéré par :

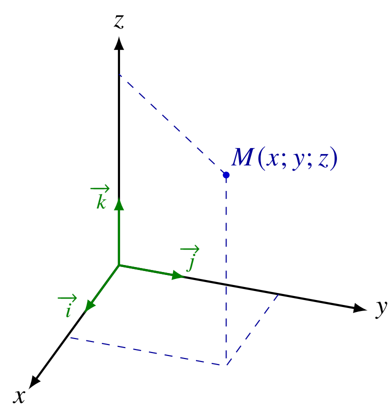


- **Les coordonnées cartésiennes** $(x; y)$ avec x et y tels que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$.
- **Les coordonnées polaires** $(r; \theta)$ avec $r = OM$ et $\theta = (\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\ )$

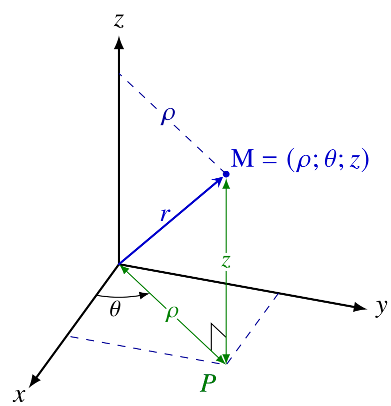
2.2.2 Repérage d'un point dans l'espace

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\ )$ direct, tout point M peut être repéré par :

- **Les coordonnées cartésiennes** $(x; y; z)$ avec x, y et z tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.

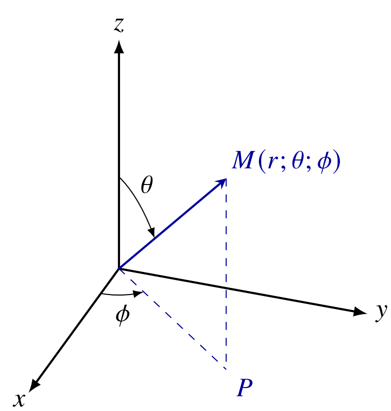


- **Les coordonnées cylindriques** $(\rho; \theta; z)$ avec $\rho = OP$ et $\theta = (\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OP}\ )$.



On a alors $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$

- **Les coordonnées sphériques** $(r; \theta; \phi)$ avec $r = OM$, la longitude $\theta = (\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OP}\ ) \in [0; 2\pi[$ et la latitude $\phi = (\ \overrightarrow{OP}\ ;\ \overrightarrow{OM}\ )$ et $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



On a alors $\begin{cases} x = \rho\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z = \quad \rho\cos(\theta \end{cases}$

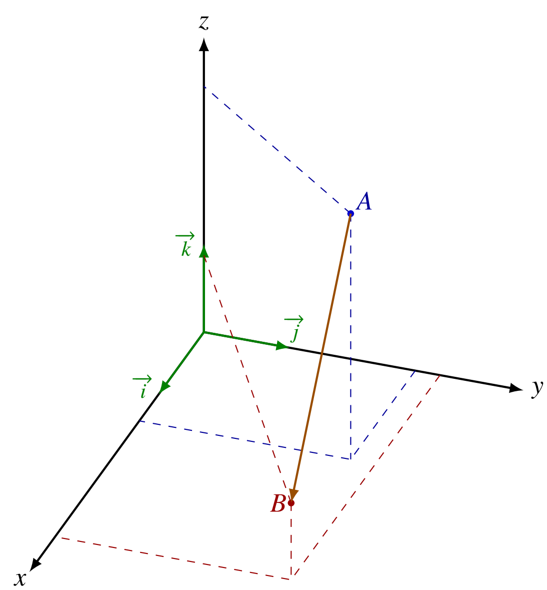
2.2.3 Coordonnées de vecteurs

Définition:
On se place dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x; y; z)$ dans ce repère signifie que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$. On écrira alors $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Propriété:
Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On a les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ = point d'arrivée - point de départ

Démonstration: *(Hors programme)*
Par définition $\overrightarrow{AB}$ est l'unique vecteur tel que $B - A = \overrightarrow{AB}$.



3 Barycentre

3.1 Barycentre de deux points

Définition:
Soit (A, α) et (B, β) deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Il existe un point unique G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

Le point G est appelé barucentre des points (A, α) et (B, β).

Remarque

Si on a $\alpha = \beta \neq 0$, on dira alors que G est l'isobarycentre des points A et B, ou plus simplement le milieu de A et B dans le cas de deux points.

Propriété:
Le barycentre G de (A, α) et (B, β) est le point de la droite (AB) tel que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) \\
&\iff (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\
&\iff \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \quad \text{car } \alpha+\beta \neq 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Propriété:
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une repère de l'espace et les points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. On donne les coordonnées de $G = \text{Bar}\,((A,\alpha); (B;\beta))$ par :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha+\beta}$$

Démonstration:
Il 'agit d'exploiter la relation vectorielle $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

3.2 Barycentre de trois points

Définition:
Soit (A,α), (B,β) et (C,γ) trois points pondérés tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. Il existe un point unique G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

Le point G est appelé barucentre des points (A,α), (B,β) et (C,γ).

Remarque

Si on a $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$, on dira alors que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

Propriété:
Le barycentre G de (A, α) et (B, β) est le point de la droite (AB) tel que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) \\ &\iff (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \\ &\iff \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC} \quad \text{car } \alpha+\beta+\gamma \neq 0\end{aligned} \tag{2}$$

Propriété:
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une repère de l'espace et les points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. On donne les coordonnées de $G = \text{Bar}\left((A, \alpha); (B; \beta)\right)$ par :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{et} \quad z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Démonstration:
Il 'agit d'exploiter la relation vectorielle $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$.

! Remarque

Le centre de gravité ou centre d'inertie d'un système de points matériels est le barycentre de ces points affectés de leurs masses respectives.

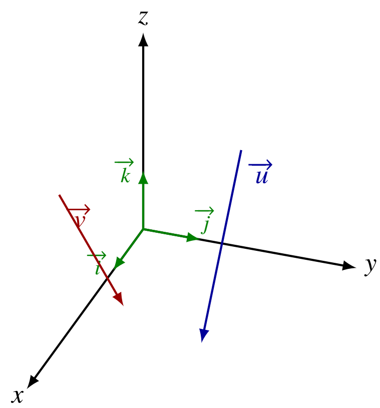
4 Opérations vectorielles

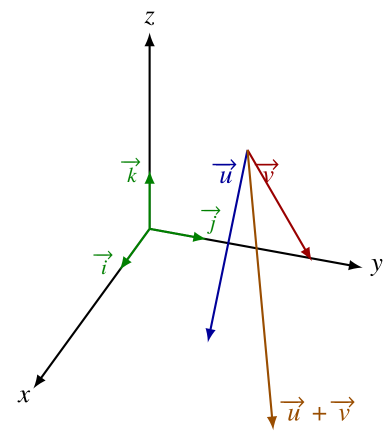
4.1 Somme et multiplication par un réel

Propriété:
Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du repère (O, $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$)
Les coordonnées du vecteur somme sont

$$\overrightarrow{u+v} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$$

Démonstration: *(Hors programme)*
Par définition d'un espace vectoriel.





Propriété:

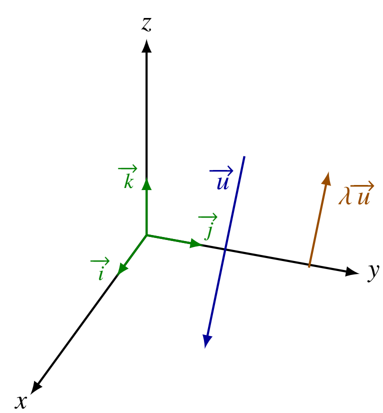
Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vecteur du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et λ un réel quelconque.

Les coordonnées du vecteur multiplié sont

$$\overrightarrow{\lambda u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

Démonstration: *(Hors programme)*

Par définition d'un espace vectoriel.



4.2 Produit scalaire

Définition/Propriété:

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit scalaire le nombre réel $< \vec{u}, \vec{v} >$ (ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$) défini par :

- $< \vec{u}, \vec{v} >= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $< \vec{u}, \vec{v} >= 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

Exemple:
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2. On a alors :
$< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} >= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2 \times 2 \times \cos(\frac{\pi}{3}) = 2$

Propriété:
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs quelconques et un nombre réel λ, on a :

- $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >=< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} >$
- $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} >=< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > + < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} >$
- $< \overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} >=< \lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= \lambda < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$

Démonstration:
Par construction d'un produit scalaire.

! Remarque

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace on a : $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >= \|\overrightarrow{u}\|^2$.

Définition:
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits orthogonaux si et seulement si $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= 0$.

Définition/Propriété:

Soient $x, x', y, y', z, z' \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On a alors :

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= xx' + yy' + zz'$$

Exercice:
Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$

! Remarque importante

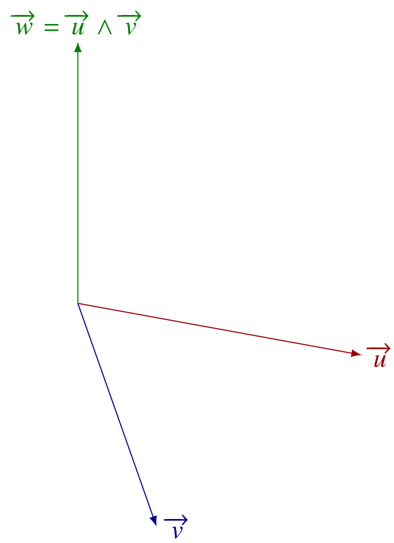
Le produit scalaire sert principalement en physique et en mécanique à détecter une orthogonalité entres vecteurs.

4.3 Produit vectoriel

Définition/Propriété:
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vectoriel le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ défini par :

- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
- l'unique vecteur $\overrightarrow{w}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de norme :

$$\|\overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$$



Propriété:
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs quelconques et un nombre réel λ, on a :

- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{\lambda v}) = (\overrightarrow{\lambda u}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$

Démonstration:
La démonstration s'effectue en utilisant la définition analytique du produit vectoriel en utilisant la propriété que deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

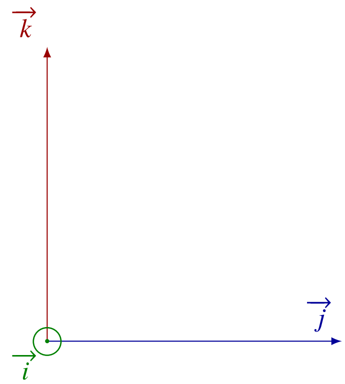
Propriété:
Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormée directe, on a alors :

$$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$$

$$\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$$

Démonstration:
La démonstration s'effectue en utilisant la définition analytique du produit vectoriel en utilisant la propriété que deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.



Propriété:
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires}$$

Définition/Propriété:

Soient $x, x', y, y', z, z' \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On a alors :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ x'z - xz' \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$$

Démonstration:
On a $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \iff (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \iff \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires

! Remarque importante

Le produit vectoriel sert principalement en physique et en mécanique à détecter une colinéarité entres vecteurs.

Théorème:

- L'aire d'un triangle ABC est donnée par $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
- L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ est donnée par $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$.

Démonstration:
Ce résultat découle du fait que $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$. On conclut par les propriétés élémentaires sur les aires et de trigonométrie.

4.4 Dérivation vectorielle

Il est possible d'obtenir des vecteurs dont les coordonnées sont des fonctions (en général du temps t en physique).

Soit donc un vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(x(t); y(t); z(t))$ dans le repère $(O\ ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On définit dont un vecteur dépendant du temps par :

$$\boxed{\overrightarrow{u} = x(t) + \overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}}$$

Définition:
On définit la dérivée vectorielle d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ dépendant d'une variable t par :

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = \frac{dx}{dt}(t)\overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt}(t)\overrightarrow{j} + \frac{dz}{dt}(t)\overrightarrow{k}$$

Propriété:
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs quelconques dépendant d'une variable t, on a alors :

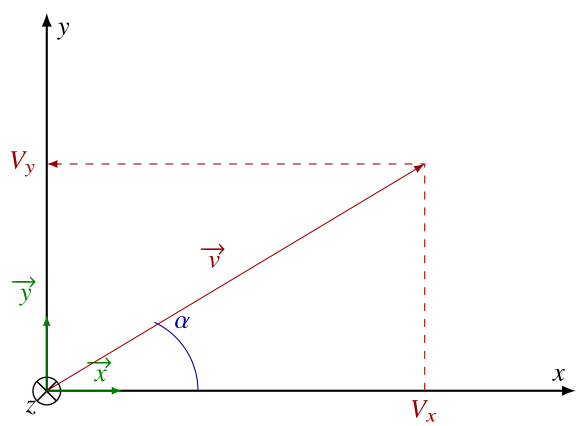
- $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} \cdot \overrightarrow{v} + \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \cdot \overrightarrow{u}$
- $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\lambda(t)\overrightarrow{u}) = \frac{d\lambda(t)}{dt}\overrightarrow{u} + \lambda(t)\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}$

Démonstration:
Il s'agit d'exprimer les vecteurs dans la base $(\overrightarrow{i}\ ; \overrightarrow{i}\ ; \overrightarrow{k})$ puis d'appliquer les règles de dérivations classiques connues pour des fonctions réelles.

5 Applications

5.1 Projection d'un vecteur

Soit une base $(\overrightarrow{x}\ ; \overrightarrow{y}\ ; \overrightarrow{z})$ orthonormée et $\overrightarrow{v}$ un vecteur orienté d'un angle $\alpha = (\overrightarrow{x}\ ; \overrightarrow{v})$ par rapport à l'horizontale.



On a donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$:

$$\begin{aligned}
V_x &= \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{x} = \|\overrightarrow{v}\| \times \underbrace{\|\overrightarrow{x}\|}_{=1} \times \cos \underbrace{(\overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{x})}_{-\alpha} = \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\alpha) \\
V_y &= \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{y} = \|\overrightarrow{v}\| \times \underbrace{\|\overrightarrow{y}\|}_{=1} \times \cos \underbrace{(\overrightarrow{v}\,,\,\overrightarrow{y})}_{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \|\overrightarrow{v}\| \times \sin(\alpha)
\end{aligned} \tag{3}$$

Ainsi, tout vecteur $\overrightarrow{v}$ peut se décomposer de façon unique dans une base orthonormée ($\overrightarrow{x}$; $\overrightarrow{y}$; $\overrightarrow{z}$) tel que :

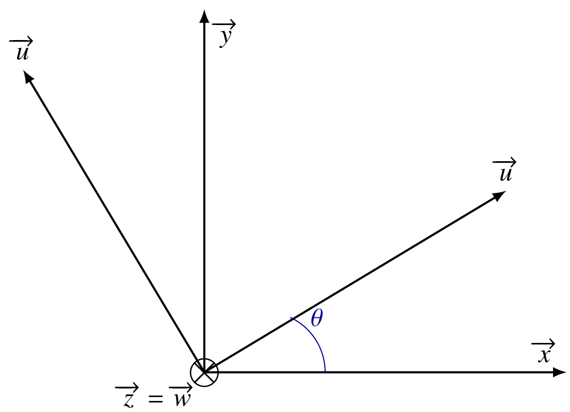
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{x})\,\overrightarrow{x} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{y})\,\overrightarrow{y} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{z})\,\overrightarrow{z} \\
&= V_x\,\overrightarrow{x} + V_y\,\overrightarrow{y} + V_z\,\overrightarrow{z}
\end{aligned} \tag{4}$$

Par ailleurs, du théorème de Pythagore, on en déduit que la norme du vecteur $\overrightarrow{v}$, notée $\|\overrightarrow{v}\|$, est la grandeur toujours positive :

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

5.2 Changement de base

Projections nécessaires au passage de ($\overrightarrow{x}$; $\overrightarrow{y}$; $\overrightarrow{z}$) vers ($\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{w}$)



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x} &= \cos(-\theta) = \cos(\theta) \\
\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{y} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \\
\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{x} &= \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right) = -\sin(\theta) \\
\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{y} &= \cos(-\theta) = \cos(\theta)
\end{aligned} \tag{5}$$

Ceci se traduit par le fait que si on a un vecteur $\overrightarrow{V}$ exprimé dans le base ($\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{w}$) par :

$$\overrightarrow{V} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w}$$

On pourra alors l'exprimer dans la base ($\overrightarrow{x}$; $\overrightarrow{y}$; $\overrightarrow{z}$) d'après les résultats de projection :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V} &= a(\cos(\theta)\overrightarrow{x} + \sin(\theta)\overrightarrow{y}) + b(-\sin(\theta)\overrightarrow{x} + \cos(\theta)\overrightarrow{y}) + c\,\overrightarrow{z} \\
&= (a\cos(\theta) - b\sin(\theta))\overrightarrow{x} + (a\sin(\theta) + b\cos(\theta))\overrightarrow{y} + c\,\overrightarrow{z}
\end{aligned} \tag{6}$$

Par contre, quelle que soit la base choisie pour exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{V}$, sa norme sera toujours identique :

$$\|\overrightarrow{V}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$