Chapitre 5 : Calcul vectoriel

Axel Carpentier

Brevet de technicien supérieur :

Enveloppe des bâtiments, conception et réalisation

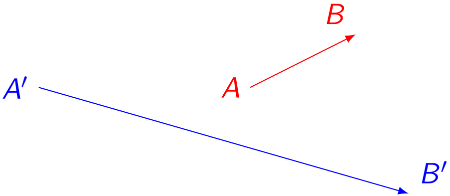
Table des matières

Définition:

On appelle vecteur $\overrightarrow{u}$ un segment orienté caractérisé par:

- Sa direction (orientation de la droite).
- Son sens (direction de la flèche).
- Sa norme (longueur du segment noté $||\overrightarrow{u}||$).

Il est également possible de définir un vecteur dans le plan par les mêmes critères.



Définition: *Somme de vecteurs*

On considère deux translations définies par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Faire succesivement ces deux translations revient à effectuer une seule translation définie par le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Définition: *Multiplication par un réel*

Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ et un réel k, multiplier un vecteur par un scalaire revient à effectuer plusieurs translations successives.

- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $k = 0$ alors $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $k > 0$ alors la direction est la même que $\overrightarrow{u}$ et la norme est $k||\overrightarrow{u}||$.
- Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $k < 0$ alors la direction est l'opposé de $\overrightarrow{u}$ et la norme est $-k||\overrightarrow{u}||$.

Propriété: *Relation de Chasles*

Soient A,B et C trois points quelconques de l'espace, on a la relation suivante :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Propriété:

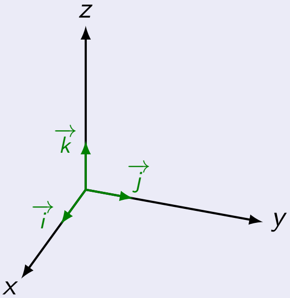
Soient k,k' deux réels et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs quelconques, on a les relation suivante :

- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$
- $k(k'\overrightarrow{u}) = (kk')\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Repère vectoriel

Définition:

On appelle repère de l'espace la donnée de 3 vecteurs non coplanaires $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



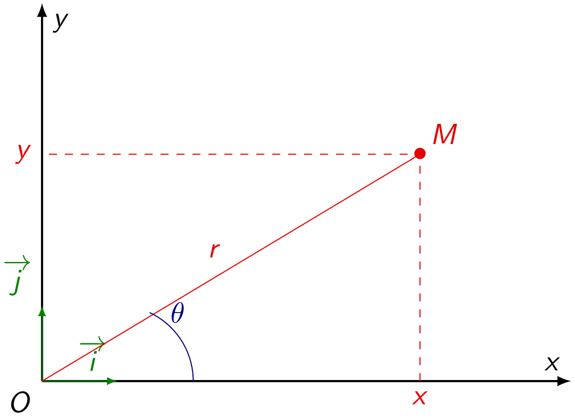
Remarque

En physique et en mécanique, il est souvent possible de simplifier des situations en se ramenant à l'étude de vecteurs dans le plan. On représentera le repère comme suit :

Les notations $\odot$ et $\otimes$ signifient respectivement que l'axe est dirigé "vers nous" ou "vers le mur".

Dans le plan, muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ )$ direct, tout point M peut être repéré par :

- **Les coordonnées cartésiennes** $(x; y)$ avec x et y tels que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$.
- **Les coordonnées polaires** $(r; \theta)$ avec $r = OM$ et $\theta = (\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\ )$



Remarque

- En connaissance des coordonnées cartésiennes d'un point $(x; y)$, on peut déterminer ses coordonnées polaires $(r; \theta)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\cos(\theta) = \dfrac{x}{r}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{r}$.
- En connaissance des coordonnées polaires d'un point $(r; \theta)$, on peut déterminer ses coordonnées cartésiennes $(x; y)$ avec $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.

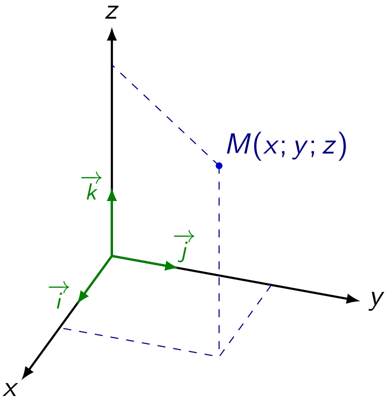
Exercice:

1. On considère le point $A(3; 3)$ dans le plan. Déterminer ses coordonnées polaires $(r_A; \theta_A)$.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point $C\left(3; \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Repérage d'un point dans l'espace

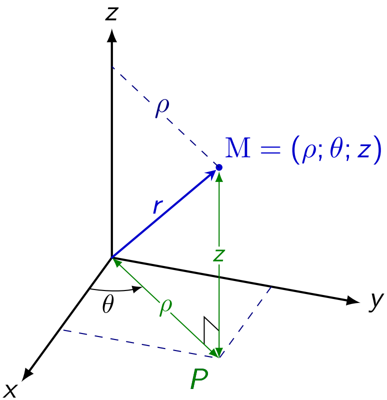
Dans l'espace, muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\ )$ direct, tout point M peut être repéré par :

- **Les coordonnées cartésiennes** $(x; y; z)$ avec x, y et z tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.



Repérage d'un point dans l'espace

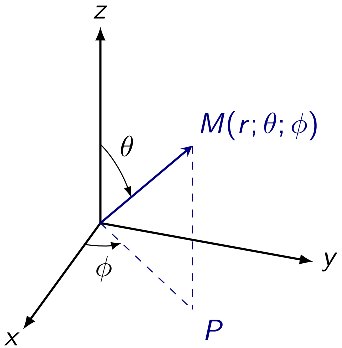
- **Les coordonnées cylindriques** $(\rho; \theta; z)$ avec $\rho = OP$ et $\theta = (\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OP})$.



On a alors $\begin{cases} x = & \rho\cos(\theta) \\ y = & \rho\sin(\theta) \end{cases}$

Repérage d'un point dans l'espace

- **Les coordonnées sphériques** $(r; \theta; \phi)$ avec $r = OM$, la longitude $\theta = (\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OP}) \in [0; 2\pi[$ et la latitude $\phi = (\overrightarrow{OP}\ ;\ \overrightarrow{OM})$ et $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.



On a alors $\begin{cases} x = & \rho \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = & \rho \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = & \rho \cos(\theta) \end{cases}$

Remarque

- En connaissance des coordonnées cartésiennes d'un point $(x; y; z)$, on peut déterminer ses coordonnées cylindriques $(r; \theta; z)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\cos(\theta) = \dfrac{x}{r}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{r}$.
- En connaissance des coordonnées cartésiennes d'un point $(x; y; z)$, on peut déterminer ses coordonnées sphériques $(r; \theta; \phi)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $\sin(\phi) = \dfrac{z}{r}$ et $\cos(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Exercice:
On considère le point $A(0; 2\sqrt{3}; -2)$ dans l'espace. Déterminer ses coordonnées sphériques $(r_A; \theta_A; \phi_A)$.

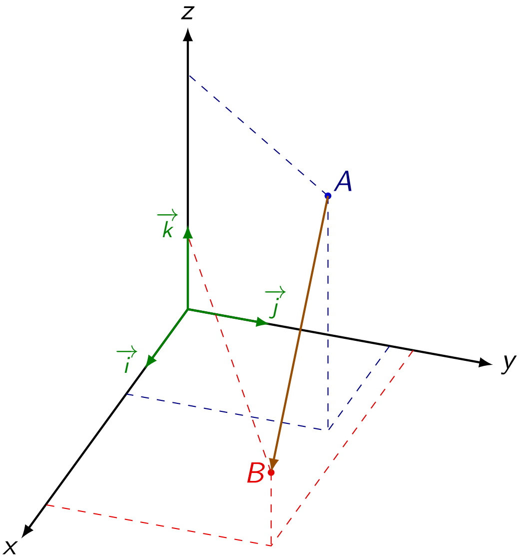
Coordonnées de vecteurs

Définition:

On se place dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Un vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x; y; z)$ dans ce repère signifie que
$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$. On écrira alors $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Propriété:

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On a les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ = point d'arrivée - point de départ



z
y
x
A
B
$\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{i}$

Barycentre de deux points

Définition:

Soit (A, α) et (B, β) deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Il existe un point unique G tel que :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

Le point G est appelé barucentre des points (A, α) et (B, β).

Remarque

Si on a $\alpha = \beta \neq 0$, on dira alors que G est l'isobarycentre des points A et B, ou plus simplement le milieu de A et B dans le cas de deux points.

Barycentre de deux points

Propriété:

Le barycentre G de (A, α) et (B, β) est le point de la droite (AB) tel que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

Propriété:

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une repère de l'espace et les points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. On donne les coordonnées de $G = \mathrm{Bar}((A, \alpha); (B; \beta))$ par :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$$

Barycentre de trois points

Définition:

Soit (A, α), (B, β) et (C, γ) trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Il existe un point unique G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

Le point G est appelé barucentre des points (A, α), (B, β) et (C, γ).

Remarque

Si on a $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$, on dira alors que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

Barycentre de trois points

Propriété:

Le barycentre G de (A, α) et (B, β) est le point de la droite (AB) tel que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

Propriété:

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une repère de l'espace et les points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. On donne les coordonnées de $G = \mathrm{Bar}\left((A, \alpha); (B; \beta)\right)$ par :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{et} \quad z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Barycentre de trois points

Remarque

Le centre de gravité ou centre d'inertie d'un système de points matériels est le barycentre de ces points affectés de leurs masses respectives.

Somme et multiplication par un réel

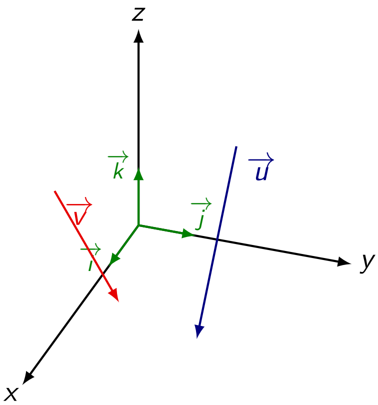
Propriété:

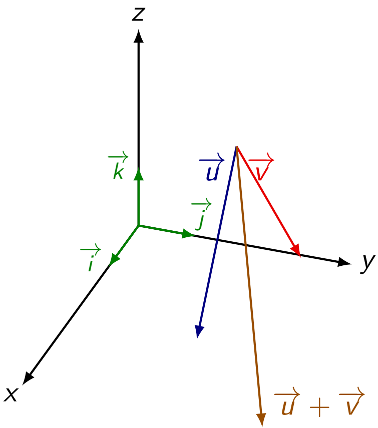
Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

Les coordonnées du vecteur somme sont

$$\overrightarrow{u+v} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$$

Somme et multiplication par un réel





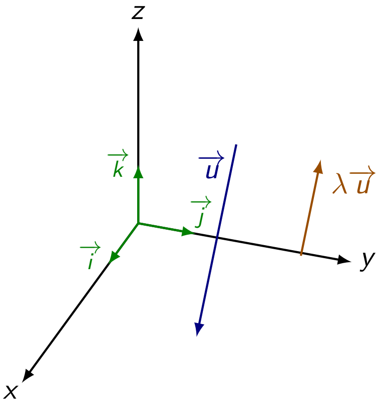
Somme et multiplication par un réel

Propriété:

Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vecteur du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et λ un réel quelconque.
Les coordonnées du vecteur multiplié sont

$$\overrightarrow{\lambda u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

Somme et multiplication par un réel



Définition/Propriété:

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit scalaire le nombre réel $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$ (ou $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$) défini par :

- $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.
- $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= 0$ si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Exemple:

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2. On a alors :

$< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} >= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2 \times 2 \times \cos(\frac{\pi}{3}) = 2$

Produit scalaire

Propriété:

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs quelconques et un nombre réel λ, on a :

- $<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>=<\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}>$
- $<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}>=<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>+<\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}>$
- $<\overrightarrow{u},\lambda\overrightarrow{v}>=<\lambda\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>=\lambda<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>$

Remarque

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace on a : $<\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}>=\|\overrightarrow{u}\|^2$.

Produit scalaire

Définition:

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits orthogonaux si et seulement si $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= 0$.

Définition/Propriété:

Soient $x, x', y, y', z, z' \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On a alors :

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= xx' + yy' + zz'$$

Produit scalaire

<u>Exercice</u>:
Calculer le produit scalaire des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$

Remarque importante

Le produit scalaire sert principalement en physique et en mécanique à détecter une orthogonalité entres vecteurs.

Opérations vectorielles

Produit vectoriel

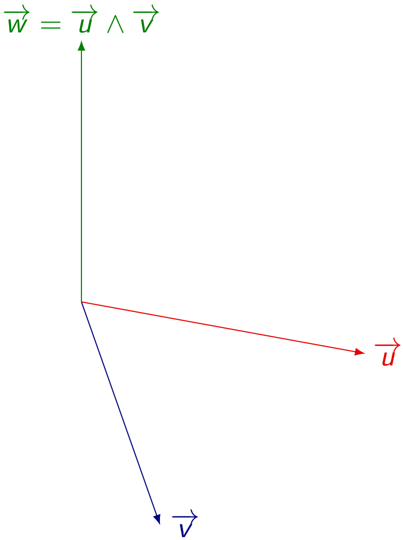
Définition/Propriété:

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vectoriel le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ défini par :

- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
- l'unique vecteur $\overrightarrow{w}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de norme :

$$\|\overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$$

Produit vectoriel



Produit vectoriel

Propriété:

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs quelconques et un nombre réel λ, on a :

- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{\lambda v}) = (\overrightarrow{\lambda u}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$

Propriété:

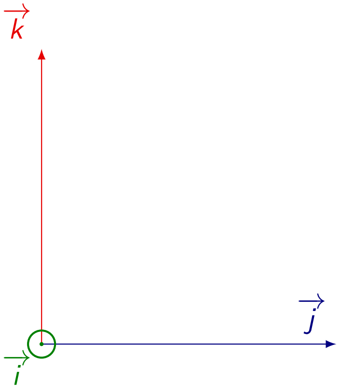
Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormée directe, on a alors :

$$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$$

$$\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$$

Produit vectoriel



Propriété:

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires}$$

Définition/Propriété:

Soient $x, x', y, y', z, z' \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On a alors :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ x'z - xz' \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$$

Produit vectoriel

Théorème:

- L'aire d'un triangle ABC est donnée par $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
- L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ est donnée par $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$.

Remarque importante

Le produit vectoriel sert principalement en physique et en mécanique à détecter une colinéarité entres vecteurs.

Dérivation vectorielle

Il est possible d'obtenir des vecteurs dont les coordonnées sont des fonctions (en général du temps t en physique).
Soit donc un vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(x(t); y(t); z(t))$ dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\ ,\ \overrightarrow{k}\ )$. On définit dont un vecteur dépendant du temps par :

$$\boxed{\overrightarrow{u} = x(t) + \overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}}$$

Définition:

On définit la dérivée vectorielle d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ dépendant d'une variable t par :

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = \frac{dx}{dt}(t)\overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt}(t)\overrightarrow{j} + \frac{dz}{dt}(t)\overrightarrow{k}$$

Dérivation vectorielle

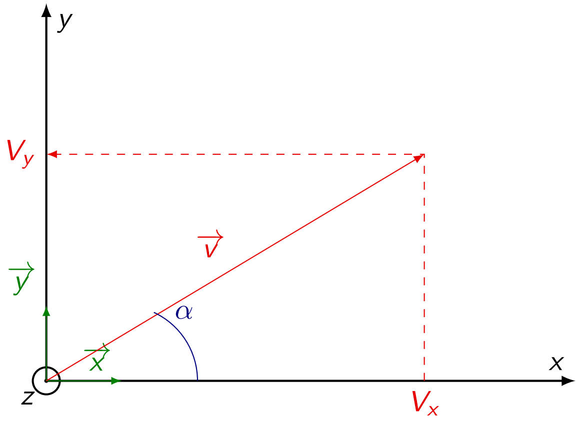
Propriété:

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs quelconques dépendant d'une variable t, on a alors :

- $\dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \dfrac{d\overrightarrow{u}}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt}$
- $\dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \dfrac{d\overrightarrow{u}}{dt} \cdot \overrightarrow{v} + \dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} \cdot \overrightarrow{u}$
- $\dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \dfrac{d\overrightarrow{u}}{dt} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt}$
- $\dfrac{d}{dt}(\lambda(t)\overrightarrow{u}) = \dfrac{d\lambda(t)}{dt}\overrightarrow{u} + \lambda(t)\dfrac{d\overrightarrow{u}}{dt}$

Projection d'un vecteur

Soit une base ($\overrightarrow{x}$; $\overrightarrow{y}$; $\overrightarrow{z}$) orthonormée et $\overrightarrow{v}$ un vecteur orienté d'un angle $\alpha = (\overrightarrow{x}\ ;\ \overrightarrow{v})$ par rapport à l'horizontale.



Projection d'un vecteur

On a donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v}$:

$$\begin{aligned} V_x &= \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{x} = \|\overrightarrow{v}\| \times \underbrace{\|\overrightarrow{x}\|}_{=1} \times \cos\underbrace{(\ \overrightarrow{v}\ ,\ \overrightarrow{x}\ )}_{-\alpha} = \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\alpha) \\ V_y &= \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{y} = \|\overrightarrow{v}\| \times \underbrace{\|\overrightarrow{y}\|}_{=1} \times \cos\underbrace{(\ \overrightarrow{v}\ ,\ \overrightarrow{y}\ )}_{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \|\overrightarrow{v}\| \times \sin(\alpha) \end{aligned} \tag{1}$$

Ainsi, tout vecteur $\overrightarrow{v}$ peut se décomposer de façon unique dans une base orthonormée $(\ \overrightarrow{x}\ ;\ \overrightarrow{y}\ ;\ \overrightarrow{z}\ )$ tel que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} &= (\ \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{x}\ )\ \overrightarrow{x} + (\ \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{y}\ )\ \overrightarrow{y} + (\ \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{z}\ )\ \overrightarrow{z} \\ &= V_x\ \overrightarrow{x} + V_y\ \overrightarrow{y} + V_z\ \overrightarrow{z} \end{aligned} \tag{2}$$

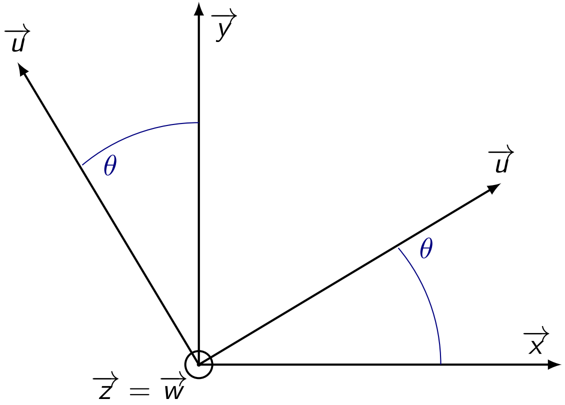
Par ailleurs, du théorème de Pythagore, on en déduit que la norme du vecteur $\overrightarrow{v}$, notée $\|\overrightarrow{v}\|$, est la grandeur toujours positive :

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Applications

Changement de base

Projections nécessaires au passage de ($\overrightarrow{x}$; $\overrightarrow{y}$; $\overrightarrow{z}$) vers ($\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{w}$)



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{x} &= \cos(-\theta) = \cos(\theta) \\
\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{y} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \\
\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{x} &= \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right) = -\sin(\theta) \\
\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{y} &= \cos(-\theta) = \cos(\theta)
\end{aligned} \tag{3}$$

Changement de base

Ceci se traduit par le fait que si on a un vecteur $\overrightarrow{V}$ exprimé dans le base ($\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{w}$) par :

$$\overrightarrow{V} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w}$$

On pourra alors l'exprimer dans la base ($\overrightarrow{x}$; $\overrightarrow{y}$; $\overrightarrow{z}$) d'après les résultats de projection :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V} &= a(\cos(\theta)\overrightarrow{x} + \sin(\theta)\overrightarrow{y}) + b(-\sin(\theta)\overrightarrow{x} + \cos(\theta)\overrightarrow{y}) + c\overrightarrow{z} \\ &= (a\cos(\theta) - b\sin(\theta))\overrightarrow{x} + (a\sin(\theta) + b\cos(\theta))\overrightarrow{y} + c\overrightarrow{z} \end{aligned} \tag{4}$$

Par contre, quelle que soit la base choisie pour exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{V}$, sa norme sera toujours identique :

$$\|\overrightarrow{V}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$