

1 Fonction inverse

1.1 Compétences Attendues

- Étudier et représenter des fonctions obtenues par combinaisons linéaires de la fonction inverse et de fonctions polynomiales de degré au maximum 3.

1.2 Exercices

Exercice 1:

Déterminer la dérivée de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 1. $f : x \mapsto -\frac{4}{x}$ | 3. $f : x \mapsto -\frac{3}{2} \left(3x + \frac{1}{x}\right)$ |
| 2. $f : x \mapsto 3x + \frac{1}{x}$ | 4. $f : x \mapsto \frac{7}{x}$ |

Exercice 2:

Déterminer la dérivée de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

- | | |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 1. $f : x \mapsto -2x + 3 - \frac{1}{x}$ | 3. $f : x \mapsto -\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)$ |
| 2. $f : x \mapsto 2x + 1 - \frac{3}{x}$ | 4. $f : x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$ |

Exercice 3:

Déterminer la dérivée de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

- | | |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 1. $f : x \mapsto 2x^2 + x + 3 - \frac{4}{x}$ | 2. $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - x + 4 + \frac{7}{x}$ |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------------|

Exercice 4:

Justifier par un calcul détaillé l'expression de $f'(x)$.

1. $f(x) = x + 60 + \frac{121}{x}$ et $f'(x) = \frac{(x-11)(x+11)}{x^2}$
2. $f(x) = 400x + \frac{490\,000}{x}$ et $f'(x) = \frac{400}{x^2}(x+35)(x-35)$
3. $f(x) = 0,003x + 60 + \frac{48\,000}{x}$ et $f'(x) = \frac{0,003}{x^2}(x-4\,000)(x+4\,000)$

Exercice 5:

Soit $f : x \mapsto x - 3 + \frac{4}{x}$ définie sur $[1; 8]$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la fonction dérivée de f .

2. Etudier le signe de $f'(x)$.

3. En déduire le sens de variation de f .

4. Donner le tableau de variation de f .

5. Tracer la courbe \mathcal{C}_f .

6. Tracer la tangente d à \mathcal{C}_f en son point A d'abscisse 1 et la tangente d' à \mathcal{C}_f en son point d'abscisse 4.

7. Donner une équation de d et de d' .

Exercice 6:

Soit $f : x \mapsto x - 6 + \frac{4}{x}$ définie sur $[1; 10]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [1; 10]$,

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[1; 10]$ puis donner le tableau de variation de f .

Exercice 7:

1. Soit $f : x \mapsto 2x + 4 + \frac{8}{x}$ définie sur $[0, 5; 4]$.

(a) Déterminer la fonction dérivée f' de f .

(b) Etudier le signe de $f'(x)$.

(c) En déduire le sens de variation de f .

(d) Donner le tableau de variation de f .

2. On se propose de construire un réservoir en tôle en forme de parallélépipède rectangle de longueur $2 m$, de largeur x et de hauteur h dont le volume intérieur est $4 m^3$.

On admet que le volume du parallélépipède rectangle est donné par $V = h \times x \times 2$.

(a) Déduire de l'information relative au volume une relation entre h et x .

(b) Montrer que la somme des aires des faces intérieures (sans couvercle) s'écrit en fonction de x :

$$S(x) = 2x + 4 + \frac{8}{x}$$

(c) Déduire des résultats obtenus précédemment les valeurs de x et de h correspondant à une aire minimale.

Exercice 8:

Une entreprise fabrique chaque mois une quantité q d'un certain produit, en tonnes. Le coût total de production est donné en euros pour tout nombre q de l'intervalle $[10; 100]$ par :

$$C(q) = 3q^2 + 40q + 2\ 700$$

On définit le coût moyen unitaire de production par $C_m(q) = \frac{C(q)}{q}$.

1. Vérifier que pour tout $q \in [10; 100]$, $C_m(q) = 3q + 40 + \frac{2\ 700}{q}$.
2. On désigne par C'_m la fonction dérivée de la fonction C_m sur $[10; 100]$. Démontrer que $C'_m(q) = \frac{3(q-30)(q+30)}{q^2}$.
3. Etudier le signe de $C'_m(q)$.
4. Etablir le tableau de variation de la fonction C_m sur $[10; 100]$.
5. Déterminer la valeur q_0 de q pour laquelle le coût moyen unitaire est minimal.

Exercice 9:

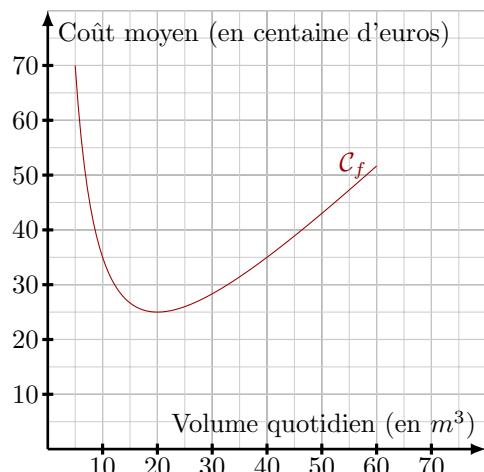
Une entreprise fabrique chaque jour un volume d'engrais biologique liquide compris entre $5 m^3$ et $60 m^3$.

Le coût moyen de production (en centaine d'euros) de cet engrais est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[5; 60]$ par :

$$f(x) = x - 15 + \frac{400}{x}$$

où x est le volume quotidien d'engrais fabriqué (en m^3).

La représentation graphique \mathcal{C}_f de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Calculer le coût moyen de la production de $50 m^3$ d'engrais.
2. Déterminer graphiquement les volumes d'engrais correspondant à un coût moyen de fabrication inférieur ou égal à 3 500 euros.
3. Montrer que, pour tout $x \in [5; 60]$, $f'(x) = \frac{x^2 - 400}{x^2}$.
4. Etudier le signe de $x^2 - 400$ pour $x \in [5; 60]$.
5. En déduire les variations de la fonction f sur $[5; 60]$.
6. Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen de production est-il minimal ? Quel est ce coût minimal ?

Exercice 10:

Une entreprise fabrique chaque jour un produit chimique liquide. La production est comprise entre 0 et $30 m^3$ par jour. Toute la production est vendue.

1. On considère la fonction :

$$C : x \mapsto x^2 + 50x + 100$$

définie sur $[1; 30]$ représentant le coût de production en fonction de m^3 fabriqués.

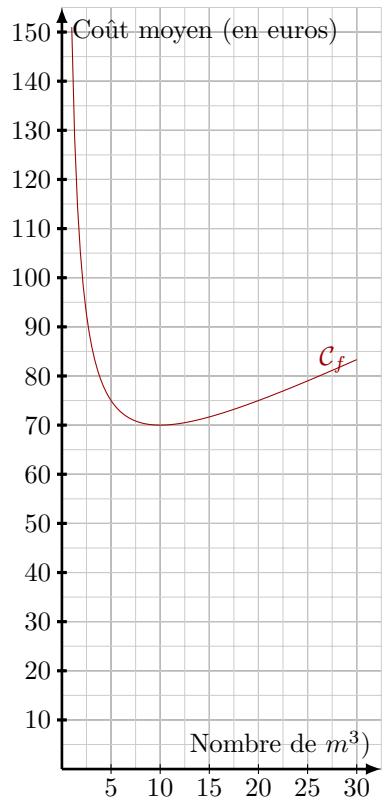
- (a) Quel est le coût de production, en euros, de $10 m^3$?
- (b) Calculer le coût unitaire, en euros, pour $10 m^3$ produits.
2. On note pour tout $x \in [1; 30]$:

$$f(x) = \frac{C(x)}{x}$$

le coût unitaire.

On donne la représentation graphique de la fonction f .

- (a) Déterminer graphiquement une valeur approchée de $f(5)$ et de $f(25)$.
- (b) D'après le graphique, pour quelle quantité de m^3 produits, le coût unitaire, en euros, est-il inférieur ou égal à 80 ?



3. (a) Démontrer que pour tout $x \in [1; 30]$:

$$f(x) = x + 50 + \frac{100}{x}$$

- (b) Démontrer que pour tout $x \in [1; 30]$:

$$f'(x) = \frac{(x-10)(x+10)}{x^2}$$

- (c) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1; 30]$ et dresser le tableau de variation de f .
 (d) Préciser la quantité de m^3 de liquide à fabriquer par jour pour que le coût unitaire soit minimal. Quel est ce coût minimal?

Exercice 11:

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible un conteneur en forme de parallélépipède rectangle de longueur 6 m, de largeur x et de hauteur h dont le volume intérieur est $37,5 \text{ m}^3$.

1. On admet que le volume du parallélépipède est $V = h \times x \times 6$. Déduire de l'information relative au volume une expression de h en fonction de x .
 2. Montrer que l'aire totale du conteneur (c'est-à-dire la somme des aires des six faces) s'écrit en fonction de x :

$$S(x) = 12x + 12,5 + \frac{75}{x}$$

3. (a) Démontrer que pour tout $x \in [0, 5; 6]$,

$$S'(x) = \frac{12(x-2,5)(x+2,5)}{x^2}$$

- (b) Etablir le tableau de variation de S sur $[0, 5; 6]$.
 (c) En déduire les valeurs de x et h correspondant à une aire minimale.

Exercice 12:

1. Soit $f : x \mapsto 2x - 230 + \frac{7200}{x}$ définie sur $[30; 120]$.

- (a) Montrer que pour tout $x \in [30; 120]$,

$$f'(x) = \frac{2(x-60)(x+60)}{x^2}$$

- (b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis construire le tableau de variation de f sur $[30; 120]$.

2. Dans un restaurant, le coût moyen unitaire de fabrication de x repas, exprimé en euros, est donné par la relation :

$$C_M(x) = 2x - 230 + \frac{7200}{x} \quad \text{pour } x \in [30; 120]$$

- (a) En utilisant les résultats précédents, déterminer le nombre de repas qui donne un coût moyen unitaire minimal. Quel est ce coût ?
 (b) Montrer que le coût total de fabrication de x repas, exprimé en euros, est donné par la relation :

$$C(x) = 2x^2 - 230x + 7200$$

- (c) Le restaurateur propose le repas au prix de 35 euros.
 i. Calculer le bénéfice $B(x)$ réalisé en fonction du nombre x de repas servis.
 ii. Calculer le bénéfice réalisé pour 60 repas servis.