Sujet 1

Cours :
Démontrer que la dimension de l'espace somme est inférieure à la somme des dimensions.

Exercice 1 :
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

Exercice 2 :
Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de E qui a f associe sa dérivée f'.

1. Déterminer les éléments propres de u.
2. Montrer que la famille $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre en utilisant u puis par une autre méthode.

Exercice 3 :
Dans un espace vectoriel E de dimension finie n, on considère trois endomorphismes u, v et f et deux réels α et β tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} f & = & \alpha u & + & \beta v \\ f^2 & = & \alpha^2 u & + & \beta^2 v \\ f^3 & = & \alpha^3 u & + & \beta^3 v \end{array} \right.$$

Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 4 :
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$ et que $E = \ker(p) \bigoplus \text{Im}(p)$.
2. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f + g = id_E$ et $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq \dim(E)$.
   Montrer que f et g sont des projecteurs.

Sujet 2

Cours :
Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont stables par v.

Exercice 1 :
Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.
M est-elle diagonisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 2 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\exists z \in \mathbb{C},\ A + {}^t\text{Com}(A) = zI_n$$

Montrer que $\text{Card}(\text{Sp}(A)) \leq 2$.

Exercice 3 :
Diagonaliser $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
En déduire une expression du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_3 & & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{vmatrix}$$

Exercice 4 :
On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par blocs par :

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

Sujet 3

Cours :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que u est diagonalisable si et seulement si on a $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

Exercice 1 :
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endormorphsime de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\ker(f)$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \ker(f) \bigoplus \text{Im}(f)$?

Exercice 2 :
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit α un réel non nul, f et g deux endomorphismes de E vérifiant :

$$f \circ g - g \circ f = \alpha f$$

1. Déterminer pour tout entier naturel k une expression de $f^k \circ g - g \circ f^k$.
2. En déduire que f est nilpotente.

Exercice 3 :
Diagonaliser $\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ 0 & & a & b & & \vdots \\ \vdots & & b & a & & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Exercice 4 :
Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente $\iff$ $\forall k \in \{1, \dots, n\},\ \text{Tr}(A^k) = 0$.

Exercice 5 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $a \in E$. Déterminer les éléments $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, la famille $(a, x, u(x))$ soit liée.

Exercice 5 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent. Montrer que $u^n = 0$.

Exercice 5 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u_1, \ldots, u_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux.
Que vaut $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n$?