1 Suites

1.1 Compétences Attendues

- Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} &= \sqrt{u_n+1} \\ u_0 &= 1 \end{cases}$
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $0 < u_n < 2$
2. $u_n < u_{n+1}$

Exercice 2:
Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_{n+1} &= \frac{1}{2}v_n + 5 \\ v_0 &= 6 \end{cases}$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (v_n).
2. Conjecturer son sens de variation.
3. Valider ou corriger votre conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 3:
Soit (w_n) la suite définie par $\begin{cases} w_{n+1} &= 3w_n - 2 \\ w_0 &= 0 \end{cases}$
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1 - 3^n$.

Exercice 4:
Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$ on a $5^n \geq 4^n + 3^n$.

Exercice 5:
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{p=0}^{n} p(p+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exercice 6:
Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} \\ u_0 &= 2 \end{cases}$
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.

Exercice 7:
Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (5n+1)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3n+4)$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\sqrt{n}$

Exercice 8:
Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \dfrac{1}{n}\right)$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4 - \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$

Exercice 9:
Soit (x_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{3n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \dfrac{1}{3\sqrt{n}}$.
2. En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 10:
Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (4n^2+3n+2)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3n^2+4)$

Exercice 11:
Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2+2n+1}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \dfrac{2}{n+1}\right)\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 12:
Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+3)(-n-4)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3\left(1 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{4}{n^3}\right)$.

Exercice 13:
Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{2n^2+1}{3n^2+4n+1}$. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 14:
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 4n + 5$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 15:
Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \sqrt{n} - 2n^2$. Déterminer la limite de la suite (w_n).

Exercice 16:
Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = -2n^2 + 5n - 4$
2. $u_n = \dfrac{5n+7}{-4n+3}$

Exercice 17:
Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{e^{2n}}{e^n - 1}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n = e^n + 1 + \dfrac{1}{e^n - 1}$.
2. En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice 18:
Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5e^n}{e^n + 1}$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)e^{n-1}$

Exercice 19:
Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n} - 1}{n+1}$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+3}{4\sqrt{n} - 1}$

Exercice 20:
En factorisant par le terme dominant, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = \dfrac{3n^2 + 2n - 5}{2 - 4n^3}$
2. $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{n + 3}$

Exercice 21:
En factorisant par le terme dominant, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = \dfrac{1 - 2n^2}{n^2 - 3n^3}$
2. $u_n = \dfrac{1 - 6n^4}{5n^6 + 2n^2 + 1}$

Exercice 22:
En factorisant par le terme dominant, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = \dfrac{(n-1)(n^2+1)}{2 - 3n^2}$
2. $u_n = \dfrac{n^2 - \dfrac{1}{n^4}}{n^3 + 3}$

Exercice 23:
La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80°C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.

Le but de cet exercice est détudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on not T_n la température du café à l'instant n, avec n exprimée en degrés Celsius et n en minutes. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$$

On choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variation de la suite (T_n)?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = T_n - 10$.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (T_n).

Exercice 24:
Une banque reçoit un dépôt de $K_0 = 100\,000$ euros. Elle en remet 90% en circulation, sous forme de prêt et conserve le reste, noté C_0.
La somme prêtée revient vers la banque sous la forme d'un nouveau dépôt, noté K_1, qui sera traité de la même façon : 90% remis en circulation sous forme de prêt, le reste, noté C_1, conservé.
On note K_n le n-ième dépôt et C_n le n-ième reste conservé.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer K_n et C_n en fonction de n.

2. On note D_n la somme de tous les dépôts et R_n la somme de tous les restes jusqu'à l'étape n. Calculer la limite des suites (D_n) et (R_n) puis interpréter ces résultats

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 25:

1. Qu'affiche le programme suivant ?

```python
def u(n):
    return 3*n-2

print(u(2))

n=10
print(u(n))
```

2. (a) Modifier le programme précédent pour qu'il calcule les termes de la suite (u_n) définie par l'expression $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2+2}$

   (b) Afficher en particulier u_{10}, u_{100} et u_{1000}. Qu'observe-t-on pour des valeurs de plus en plus grandes de n ?

Exercice 26:

1. Qu'affiche le programme suivant ?

```python
def u(n):
    if n==0:
        return 2
    else :
        return 3*u(n-1)-2

print(u(0))
print(u(1))
print(u(2))

n=10
print(u(n))
```

La fonction définie et utilisée ici s'appelle une fonction récursive, c'est une fonction qui s'appelle elle-même.

2. Modifier le programme précédent pour qu'il calcule les termes de la suite (u_n) définie par l'expression : $u_n = \dfrac{2u_{n-1}^2-1}{u_{n-1}^2+2}$.

   Afficher en particulier les premiers termes jusqu'à u_{10} puis jusqu'à u_{20}.

3. Une autre manière de programme les calculs des termes d'une telle suite est:

```python
u=2
n=10
for i in range(n):
    u=(2*u**2-1)/(u**2+2)
    print(u)
```

qui calcule et affiche ici tous les termes jusqu'à u_{10}.

   (a) Utiliser ce programme pour afficher en particulier les termes u_{10}, u_{100} et u_{1000}.

   (b) Qu'observe-t-on pour des valeurs de plus en plus grandes de n ?

Exercice 27:
Ecrire une fonction `fibonacci` en Python qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie les n premiers termes de la suite de Fibonacci.

1.4 Approfondissements

Exercice 28:
Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Exercice 29:
Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2-3}{x_n+2}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 3$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - 3 > \dfrac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 30:
L'objectif est d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)!}$.
On pose pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, f_n(x) = (1-x)^n e^x$.

1. Vérifier que $f'_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) - (n+1)f_n(x)$.
2. En déduire que $\int_0^1 f_{n+1}(x)dx - (n+1)\int_0^1 f_n(x)dx = -1$.
3. A l'aide de ce qui précède, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $u_n = e - \dfrac{1}{n!}\int_0^1 f_n(x)dx$.
4. Démontrer que, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times [0; 1], 0 \leq f_n(x) \leq e^x$ et en déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.
5. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?