

1 Combinatoire et Dénombrement

1.1 Compétences Attendues

- Dans le cadre d'un problème de dénombrement, utiliser une représentation adaptée (ensembles, arbres, tableaux, diagrammes) et reconnaître les objets à dénombrer.
- Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (informatique, génétique, théorie des jeux, probabilités, etc.).

1.2 Exercices

Exercice 1:

On considère l'ensemble $A = \{1; 3; 5; 11\}$. Donner tous les 2-arrangements de A . Combien y a-t-il ?

Exercice 2:

On considère l'ensemble $A = \{c; o; s\}$. Donner toutes les permutations de A . Combien y en a-t-il ?

Exercice 3:

On considère l'ensemble $A = \{1; 3; 7; 9; 11\}$.

1. Donner deux éléments de A^3 , combien en existe-t-il ?
2. Donner deux 3-arrangements d'éléments de A . Combien en existe-t-il ?
3. Donner deux permutations de A . Combien en existe-t-il ?

Exercice 4:

Deux groupes d'étudiants se rendent au cinéma. Le premier est composé de 6 personnes et le deuxième de 4 personnes. Les étudiants s'installent sur une rangée de dix places.

1. Combien de configurations différentes existe-t-il ?
2. Les deux groupes ne veulent pas être séparés. Combien de configurations sont possibles ?

Exercice 5:

A l'occasion de d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent et une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition...) ?

Exercice 6:

Un groupe d'élèves de terminale constitue le bureau de l'association "Bureau des

arts". Ce bureau est composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Combien y-a-t-il de bureaux possibles ? Il y a 24 élèves dans la classe.

Exercice 7:

Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.

1. Combien de résultat peut-on obtenir ?
2. Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

Exercice 8:

Les nombres 5, -1 et 3 constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues. Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système.

Exercice 9:

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mots MATHS ?

Exercice 10:

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot TABLEAU ?

Exercice 11:

Calculer les coefficients binomiaux : $\binom{51}{2}$; $\binom{1475}{1474}$; $\binom{1321}{0}$; $\binom{26}{24}$

Exercice 12:

Que vaut $\sum_{k=0}^9 (-1)^k \binom{9}{k}$?

Exercice 13:

Pour tout entier n , on pose $u_n = \binom{2n}{n}$. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 14:

Pour préparer le prochain devoir de mathématiques, le professeur donne une liste de dix exercices et vous recommande d'en travailler cinq.

1. Combien de combinaisons d'exercice pouvez-vous construire ?
2. Le professeur insiste sur le fait que l'exercice 8 est à travailler absolument. Il vous reste 4 exercices à choisir. Combien de combinaison pouvez-vous construire ?

Exercice 15:

On considère un jeu de 32 cartes. Chaque carte possède une couleur et une valeur. Une main est un ensemble de 5 cartes tirées dans ce paquet sans tenir compte de l'ordre des cartes tirées. Déterminer le nombre de mains :

1. comportant exactement 3 coeurs.
2. Comportant exactement un roi et exactement deux dames.
3. comportant au plus 2 rois.

Exercice 16:

Dans une grille de loto, il faut choisir cinq nombres de 1 à 49 ainsi qu'un nombre chance allant de 1 à 10. De combien de manières différentes peut-on remplir sa grille de loto ?

Exercice 17:

On lance simultanément dix pièces de monnaie et on regarde de quel côté elles tombent.

1. Combien de configurations avec 3 pièces tombant sur FACE existe-t-il ?
2. Combien de configurations avec au plus 3 pièces tombant sur FACE existe-t-il ?

Exercice 18 :

Un entraîneur doit constituer une équipe de football. Il a à sa disposition 3 gardiens de buts, 8 défenseurs, 6 milieux de terrain et 6 attaquants. Il doit constituer une équipe désignant 1 gardien, 4 défenseurs, 3 milieux de terrain et 3 attaquants. Combien d'équipes peut-il construire ?

Exercice 19:

Au loto, il y a 49 numéros. Une grille de loto est composée de 6 de ces numéros. Quel est le nombre de grilles différentes ?

Exercice 20:

De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes ?

Exercice 21:

Chaque domino est composé de constellation allant de 0 à 6 points. Un jeu complet de dominos est composé de tous les dominos ainsi réalisables. Combien y-a-t-il de dominos dans ce jeu ?

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 22:

Ecrire une fonction `factoriel` en Python qui prend en entrée un entier naturel n et qui renvoie $n!$.

Exercice 23:

Ecrire une fonction `arrangementnt` en Python qui prend en entrée un entier naturel n et un entier naturel $k \leq n$ et qui renvoie $\mathcal{A}_n^k$.

Exercice 24:

Ecrire une fonction `combinaison` en Python qui prend en entrée un entier naturel n et un entier naturel $k \leq n$ et qui renvoie $\binom{n}{k}$.

1.4 Approfondissements

Exercice 25:

Soit p points du plan distincts.

1. Combien de polygones à $n \leq p$ côtés peut-on réaliser à partir de ces points ?
2. On fixe un tel polygone à n côtés. Combien de diagonales de ce polygone comporte-t-il ?

Exercice 26:

Dans ma maison, il y a un escalier de 17 marches. Pour descendre cet escalier, je peux à chaque pas descendre de une marche, deux marches ou trois marches à la fois. Combien y-a-t-il de manières de descendre cet escalier ?

Exercice 27:

On dispose de 4 hélicoptères de tourisme, de 4 pilotes et de 8 hôtesses de l'air. Combien de façons différentes y-a-t-il d'attribuer les pilotes et hôtesses de l'air aux hélicoptères de manière que chaque hélicoptère ait un pilote et deux hôtesses de l'air ?