1 Limites de fonctions

1.1 Compétences Attendues

- Déterminer dans des cas simples la limite d'une suite ou d'une fonction en un point, en $\pm\infty$, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme.
- Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a.

1. $f : x \mapsto x^3 + x - 3$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$.
2. $f : x \mapsto x^3 - x^2$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$.

Exercice 2:
Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3} + 4\sqrt{x}$ en $a = +\infty$ puis en $a = 0^+$.

Exercice 3:
Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a.

1. $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1-x}$ en $a = 1^+$ puis en $a = 1^-$.
2. $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$.

Exercice 4:
Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a.

1. $f : x \mapsto (1-2x)e^x$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x) - 1}$ en $a = 0^+$ puis en $a = 0^-$.

Exercice 5:
Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a.

1. $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1-x}$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{(x+5)^2 - 25}{x}$ en $a = +\infty$ puis en $a = 0$.

Exercice 6:
Déterminer la limite de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 25}$ en $a = +\infty$, en $a = -\infty$, en $a = 5^+$, en $a = 5^-$, en $a = (-5)^+$ puis en $a = (-5)^-$.

Exercice 7:
Soient f et g deux fonctions. Justifier par un contre exemple que les implications suivantes sont fausses.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \implies \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \implies \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Exercice 8:
Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

1. $f : x \mapsto x^3 - 2x$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

Exercice 9:
Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

1. $f : x \mapsto \frac{x^2-x}{x^3-2}$
2. $f : x \mapsto \frac{3x^3+2}{2x^2+4}$

Exercice 10:
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x, x-2 \leq f(x) \leq x+2$. Que peut-on en déduire pour les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?

Exercice 11:
Déterminer les limites de chaque fonction en $+\infty$:

1. $f : x \mapsto x^2 + 2\cos(x)$
2. $g : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$

Exercice 12:
Déterminer les limites de chaque fonction en $+\infty$:

1. $h : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x) + x}$
2. $k : x \mapsto \sqrt{x^2+2}$

Exercice 13:
Soit f une fonction telle que, pour tout $x > 1$:

$$\frac{2x^2+3}{3x^2-x} \leq f(x) \leq \frac{2x^2+5x}{3x^2-x}$$

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 14:
Déterminer les limites de chaque fonction en $-\infty$ et en $+\infty$:

1. $f : x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$
2. $g : x \mapsto \frac{e^x+1}{x}$
3. $h : x \mapsto e^x + 2$

Exercice 15:

1. (a) Démontrer que pour tout réel $x > 0, e^{3x+2} > e^x$.
   (b) En déduire alors la limite de $x \mapsto e^{3x+2}$ en $+\infty$.
2. Calculer de la même façon la limite des expressions suivantes en $+\infty$:
   (a) e^{2x-1}
   (b) $\frac{2}{e^{5x-3}}$
   (c) e^{-4x-1}

Exercice 16:
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{e^x+x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3xe^x+4e^x+3x}{e^{2x}+e^x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3xe^x+4e^x+3x}{e^{2x}+e^x+1}$

Exercice 17:
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{28x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{3x}}{28x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 3x^2 + 5x - 1$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 3x^2 + 5x - 1$

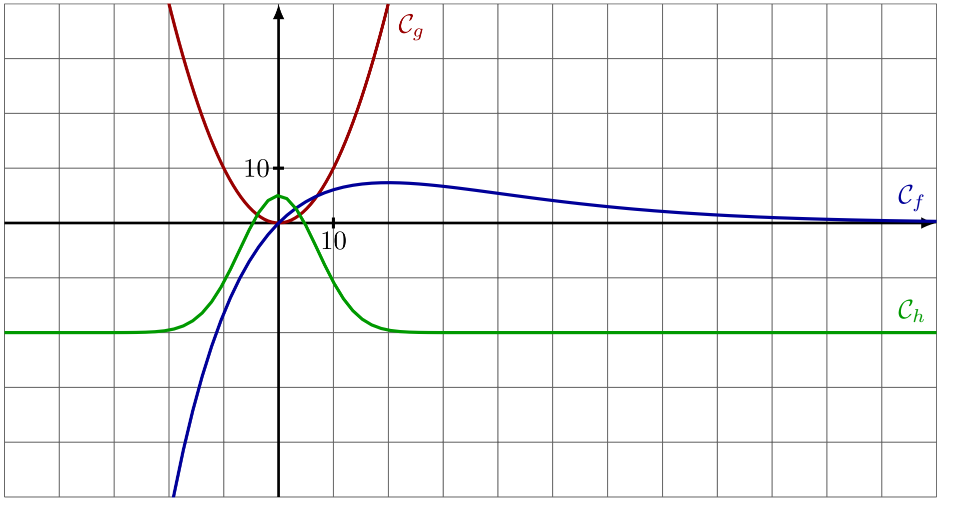
Exercice 18:
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
3. $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

Exercice 19:
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(2+\cos(x))e^x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(2+\cos(x))e^x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} - x$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x} - x$

Exercice 20:
On considère les courbes représentatives des fonctions f, g et h dans un repère du plan.



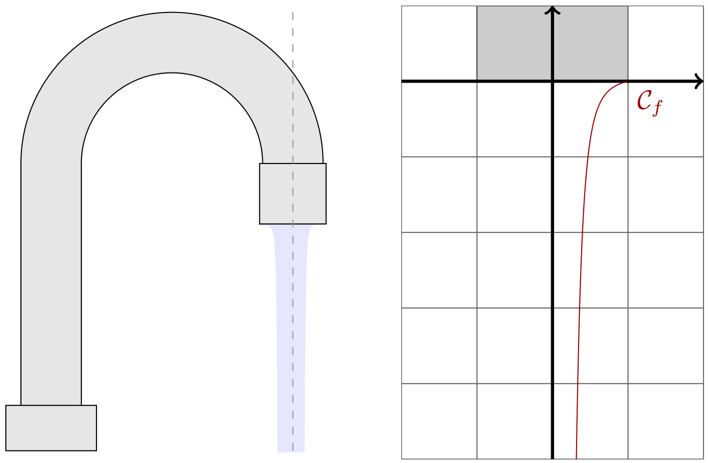
Déterminer, lorsque c'est possible, les limites demandées:

1. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x)$
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (f+g)(x)$
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f+h)(x)$
   (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (f+h)(x)$
2. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f\times g)(x)$
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (f\times g)(x)$
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f\times h)(x)$
   (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (f\times h)(x)$
3. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{f}{h}\right)(x)$
   (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{f}{h}\right)(x)$

Exercice 21:
Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{9x^2+2x+1}}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$:
$$9x^2 \leq 9x^2+2x+1 \leq (3x+1)^2$$
2. En déduire que pour tout $x > 0$:
$$3 \leq f(x) \leq \frac{3x+1}{x}$$
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 22:
L'écoulement de l'eau d'un robinet a un débit constant et modéré.
On s'intéresse en particulier à une partie du profil d'écoulement que l'on modélise par la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous dans un repère orthonormé.



$\mathcal{C}$ est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $]0;1]$ qui respecte les trois conditions suivantes :
$$(\mathcal{H}) : \quad f(1)=0, f'(1)=0,25 \text{ et } \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

1. Justifier que la fonction f ne peut pas être une fonction polynôme du second degré.
2. Déterminer les nombres réels a et b pour lesquels f est la fonction définie sur l'intervalle $]0;1]$ par $f(x) = \dfrac{a}{x^4} + bx$ de façon à ce qu'elle respecte les trois conditions $(\mathcal{H})$.

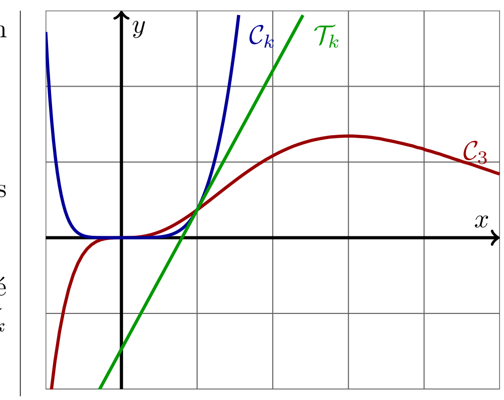
Exercice 23:
Soit $g : x \mapsto (2x^3-4x^2)e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $g'(x)$.
2. Déterminer le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en $-\infty$ en justifiant soigneusement et préciser les équations des asymptotes éventuelles à sa corube représentative.
4. Déterminer les variations de g et dresser le tableau de variations complet de la fonction g.

Exercice 24:

Pour tout nombre entier non nul n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$
On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-contre, on a représenté une courbe $\mathcal{C}_k$ où $k \in \mathbb{N}^*$, sa tangente $\mathcal{T}_k$ au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathcal{C}_3$.



L'objectif du problème est de déterminer la valeur de k telle que la droite $\mathcal{T}_k$ coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5};0\right)$.

1. (a) Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Etudier les variations de la fonction f_1 et dresser son tableau de variations.
   (c) A l'aide du graphique, justifier que k est un nombre entier supérieur ou égal à 2.
2. (a) Démontrer que si $n > 1$, alors toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on déterminera les coordonnées.
   (b) Vérifier que, pour tout nombre entier naturel $n \geq 2$ et pour tout réel x, on a :
$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

4. (a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite $\mathcal{T}_k$ avec l'axe des abscisses.

   (b) En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur du nombre entier k.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 25:
On considère une famille de fonctions f_n dépendant d'un paramètre entier relatif n et définies sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par :

$$f_n : x \mapsto \frac{(n-3)(x^3-x-2)}{x+1} - x^2$$

1. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous, qui trace les courbes représentatives de ces fonctions $[0; 10000]$ pour $-10 \leq n \leq 10$.

```
import matplotlib.pyplot as plt


def fn(x,n):
    return ...


absc=[i for i in range(10000)]
for n in range(...):
    ordo=[... for x in ...]
    plt.plot(absc,ordo,linewidth=1)
    plt.text(10000,fn(10000,n),str(n))

axe=plt.gca()
axe.spines['bottom'].set_position('zero')
axe.spines['left'].set_position('zero')
axe.spines['right'].set_color('none')
axe.spines['top'].set_color('none')
plt.show()
```

2. En déduire une conjecture concernant la limite de f_n en $+\infty$ en fonction du paramètre n.

3. Confirmer ou infirmer cette conjecture par un raisonnement mathématique.

Exercice 26:
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto 0,03x^2 - 150x + 1$$

1. Dresser le tableau de variation de f.

2. Résoudre l'inéquation $0,03x^2 - 150x + 1 \geq 100$.

3. L'affirmation "Si $x > 5000$ alors $f(x) > 100$" est-elle vraie ou fausse ?

4. Voici une fonction Python

```
def seuil(A):
    x=2500
    while 0.03*x**2-150*x+1<A:
        x+=1
    return x
```

   Que renvoie `seuil(100)`? `seuil(1000)`? `seuil(10000)`?

5. La fonction `seuil` renverra-t-elle une valeur numérique pour tout valeur de A aussi grande que l'on veuille ?

1.4 Approfondissements

Exercice 27:
Etudier les limites suivantes :

1. $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$

2. $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$

Exercice 28:
Etudier les limites à droit en 0 des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$

2. $g : x \mapsto x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$

3. $h : x \mapsto x^2 \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$

Exercice 29:
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier et déterminer, si elles existent, les limites en 0 des fonctions:

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{a} \left\lfloor \dfrac{b}{x} \right\rfloor$

2. $g : x \mapsto \dfrac{b}{x} \left\lfloor \dfrac{x}{a} \right\rfloor$