1 Schéma de Bernoulli

1.1 Compétences Attendues

- Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques. Représenter la situation par un arbre. Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.
- Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale.
- Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès.
- Dans le cadre d'une résolution de problème modélisé par une variable binomiale X, calculer numériquement une probabilité du type $\mathbb{P}(X = k), \mathbb{P}(X \leq k), \mathbb{P}(k \leq X \leq k')$, en s'aidant au besoin d'un algorithme ; chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $\mathbb{P}(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à 1-α.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Abdel possède cinq cartes de fidélité de magasins différents dans sa poche. Ces cinq cartes ont toutes le même format et sont indiscernables au toucher. Au moment du passage en caisse dans un de ces magasins, il choisit au hasard une carte de fidélité. Justifier que cette expérience aléatoire correspond bien à une épreuve de Bernoulli en précisant le succès et la probabilité de celui-ci.

Exercice 2:
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,3$. Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

Exercice 3:
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli telle que $\mathbb{V}(X) = 0,09$. Quelles sont les valeurs possibles du paramètre p ?

Exercice 4:
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour quelle valeur de $p \in [0; 1]$ la variance de X est-elle maximale ?

Exercice 5:
On a réalisé une étude statistique sur les performances d'une joueuse de basket professionnelle. Lorsqu'elle joue à domicile, cette joueuse réussit 68% de ses tirs mais seulement 42% lorsqu'elle joue à l'extérieur.

1. Cette joueuse dispute un match à domicile et elle effectue deux tirs d'affilés indépendants l'un de l'autre.
   (a) Effectuer un arbre de probabilité exprimant la situation.
   (b) Quelle est la probabilité que cette joueuse marque deux paniers ?
   (c) Quelle est la probabilité que la jouesue marque au moins un panier ?
2. Cette joueuse dispute un match à l'extérieur et elle effectue trois tirs successifs indépendants les uns des autres.
   (a) Effectuer un arbre de probabilité exprimant la situation.
   (b) Quelle est la probabilité que la joueuse ne marque aucun panier ?
   (c) Quelle est la probabilité que la joueuse marque au plus deux paniers ?

Exercice 6:
Soit $X \sim \mathcal{B}(6; 0,4)$, déterminer les probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}(X = 2)$
2. $\mathbb{P}(X = 0)$
3. $\mathbb{P}(X \leq 4)$
4. $\mathbb{P}(X \leq 6)$
5. $\mathbb{P}(X > 3)$
6. $\mathbb{P}(X \geq 5)$

Exercice 7:
Soit X une variable aléatoire. Sachant que son espérance vaut $19,2$ et que sa variance vaut $3,84$, X peut-elle suivre une loi binomiale ? Si oui, en déduire ses paramètres.

Exercice 8:
Soit $X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{1}{3}\right)$, calculer :

1. $\mathbb{P}(X = 1)$
2. $\mathbb{P}(X \geq 4)$
3. $\mathbb{P}(X < 3)$

Exercice 9:
Soit $X \sim \mathcal{B}\left(4; \frac{1}{4}\right)$.

1. Construire un tableau résumant la loi de probabilité de X.
2. A partir de ce tableau, calculer l'espérance de X.

Exercice 10:
On lance 4 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.

1. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 3 obtenus. Que valent $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X \leq 3)$?
2. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir de 5 ni de 6 sur l'ensemble des lancers?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux fois le nombre 4 ?

Exercice 11:
39% de la population française est du groupe sanguin $A+$. On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes de groupe $A+$ dans un échantillon de 183 personnes prises au hasard dans la population française.

1. Sous quelle hypothèse X suit-elle une loi binomiale ?
2. Pourquoi cette hypothèse est-elle raisonnable ?
3. On admet que cette hypothèse est vérifiée.
   Préciser alors les paramètres de X.

Exercice 12:
On lance quatre fois une pièce équilibrée et on regarde sur quel côté elle tombe.

1. Quel est la probabilité de ne tomber aucune fois sur pile ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 piles ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus 2 piles ?

Exercice 13:
Dans un petit service départemental d'incendie et de secours (SDIS) de la région Ile-de-France, la variable aléatoire X donnant le nombre d'interventions quotidiennes suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,2$.

1. Déterminer la probabilité qu'il passe une journée sans aucune intervention.
2. Déterminer le nombre moyen d'interventions quotidiennes.
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 3 interventions journalières ?

Exercice 14:
Maxime est un cuisinier maladroit: à chaque fois qu'il fait un gâteau, il laisse tomber un oeuf par terre avec une probabilité de $0,6$. S'il laisse tomber un oeuf, il devra en prendre un autre qu'il ne laissera pas tomber. Maxime fait un gâteau par semaine et chaque gâteau nécessite un seul oeuf : de combien d'oeufs aura-t-il besoin en moyenne chaque année de 52 semaines ?

Exercice 15:
Un avion possède une capacité de 150 places. Pour un billet vendu, la probabilité que le passager se présente réellement à l'embarquement est $0,93$. Afin de limiter les risques de voyager avec des places vides, la compagnie décide de mettre en vente 158 places pour ce vol.

1. Déterminer la probabilité que 150 passagers exactement se présentent à l'embarquement.
2. Déterminer la probabilité que le nombre de passagers se présentant soit strictement supérieur à 150.

Exercice 16:
Une diode est fabriquée en série. A la sortie de la ligne de production, la probabilité qu'une diode prise au hasard soit défectueuse est égale à $0,017$. Les diodes sont conditionnées par boîtes de 185 unités.

1. Quel nombre moyen de diodes défectueuses peut-on attendre par boîte ?
2. Une boîte est prise au hasard après conditionnement. Déterminer la probabilité qu'elle ne contienne aucune diode défectueuse.
3. Une boîte est dite "qualifiée" lorsqu'elle contient au plus quatre diodes défectueuses. Déterminer la probabilité que la boite choisie soit qualifiée.
4. Un carton contient 10 boîtes. Quelle est la probabilité qu'un carton pris au hasard ne contienne que des boîtes qualifiées ?

Exercice 17:
Un navire de croisière accueille 423 passagers. Lors d'un voyage, pour un jour quelconque, la probabilité qu'un passager pris au hasard se présente à la salle de sport est égale à $0,17$. On note X la variable aléatoire associant à chaque jour le nombre de passagers venant à la salle de sport.

1. Préciser la loi de probabilité suivie par X ainsi que ses paramètres.
2. A l'aide de la calculatrice, afficher dans un tableau les valeurs de k ainsi que les probabilités $\mathbb{P}(X = k)$ correspondantes pour $0 \leq k \leq 423$.
3. Donner les valeurs de k pour lesquelles $\mathbb{P}(X = k) \geq 0,05$.
4. Afficher dans un tableau les probabilités cumulées croissantes $\mathbb{P}(X \leq k)$ pour $0 \leq k \leq 423$.
5. Déterminer le plus petit entier a tel que $\mathbb{P}(X \leq a) \geq 0,99$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus grand nombre entier b tel que $\mathbb{P}(X \leq b) \leq 0,01$.
7. Déterminer un intervalle $[|c; d|]$ d'amplitude minimale tel que
   $\mathbb{P}(c \leq X \leq d) \geq 0,95$.

Exercice 18:
Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges. L'expérience $\mathcal{E}$ consiste à tirer simultanément deux boules de l'urne.

On définit les événements :

- A : "Obtenir deux boules de couleurs différentes."
- B : "Obtenir deux boules blanches."
- C : "Obtenir deux boules rouges."

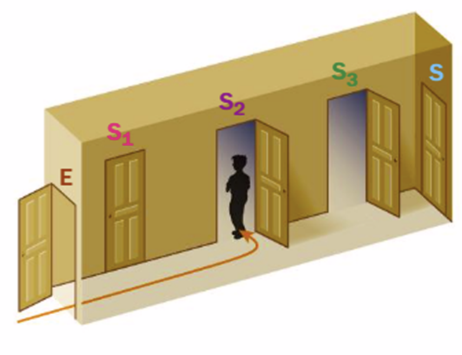
1. (a) Montrer que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{20n}{n^2 + 19n + 90}$
   (b) Voici les règles d'un jeu :
   - Le joueur mise 5 euros pour réaliser l'expérience $\mathcal{E}$.
   - Il gagne 10 euros s'il obtient deux boules de couleurs différentes et ne gagne rien dans les autres cas.

   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le jeu est favorable au joueur.
2. Pour la suite du problème, on prend $n = 5$.
   (a) Calculer la probabilité de chacun des événements A, B et C.
   (b) L'expérience $\mathcal{E}$ est réalisée quatre fois (on remet dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience). Calculer la probabilité des événements suivants :
   - D : " Obtenir exactement 3 fois deux boules blanches."
   - E : "Obtenir exactement 2 fois deux boules blanches et 1 fois deux boules rouges."
   - F : "Obtenir exactement 3 boules rouges."

   (c) Combien de fois faut-il réaliser l'expérience $\mathcal{E}$ pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois deux boules de couleurs différentes soit supérieure à $0,99$.
   (d) L'expérience $\mathcal{E}$ est répétée 500 fois. Calculer la probabilité d'obtenir entre 200 et 250 fois deux boules de couleurs différentes.

Exercice 19:
Pour sortir d'une maison hantée, Maria doit passer par un étrange couloir le long duquel se trouvent trois portes fermées, notées S_1, S_2 et S_3. On accède à ce couloir par le portail E. Au moment où l'on ouvre ce portail, chacune des trois portes a une chance sur deux de s'ouvrir par enchantement.

L'étroitesse du couloir oblige maria à sortir du couloir par la première porte ouverte qu'elle rencontre ; si les trois portes sont fermées, elle doit sortir du couloir par l'issue notée S. Quand Maria a quitté le couloir, le portail et toutes les portes ouvertes se referment.



1. Maria ouvre le portail.
   (a) Calculer la probabilité que MAria soit confrontée à la configuration : S_1 est fermée, S_2 est fermée et S_3 est ouverte".
   (b) Calculer la probabilité qu'exactement deux des trois portes soient ouvertes.
   (c) On note p_i la probabilité de sortir du couloir par la porte S_i. Calculer p_1, p_2 et p_3.
   (d) Sachant que S_2 est ouverte, calculer la probabilité que Maria sorte du couloir par la porte S_3.
2. Lorsque Maria passe par les portes S_1 ou S_3, son chemin la ramène au portail E. En revanche, si elle passe par S_2 ou par S, elle sort définitivement de la maison hantée.
   (a) Quelle est la probabilité que Maria sorte de la maison en ne passant qu'une seule fois dans ce couloir ?
   (b) Quelle est la probabilité que Maria passe au plus trois fois dans le couloir avant ce sortir de la maison ?
   (c) Sachant qu'au deuxième passage Maria a franchi la porte S_1, calculer la probabilité qu'elle sorte de la maison au quatrième passage.
3. Cette fois, 8 personnes franchissent successivement le portail E. Quelle est la probabilité qu'exactement 6 de ces personnes passent par S_2 à leur premier passage ?
4. On suppose maintenant que n personnes franchissent une seule fois chacune le portail E. Calculer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins une de ces personnes sorte de la maison hantée soit supérieure ou égale à $0,95$.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 20:

1. Ecrire une fonction `bernoulli(p)` qui renvoie `0` ou `1` avec la probabilité `p`.

2. Ecrire une fonction `nombredesucces(n,p)` qui renvoie le nombre de succès (de `1`) obtenus pour une répétition de n épreuves de Bernoulli.

Exercice 21:
On lance un dé équilibré à dix faces numérotées de 1 à 10 et on observe si le nombre obtenu est premier.

1. Justifier qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.

2. X est la variable aléatoire comptant le nombre de succès : "obtenir un nombre premier" après 1000 lancers. Pour calculer la probabilité d'obtenir entre 400 et 500 (inclus) nombres premiers, Anis a écrit les fonctions en Python ci-dessous renvoyant le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ et la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.

```python
import math
def Coef(n,k):
    return math.factorial(n)//
            (math.factorial(k)*math.factorial(n-k)

def P(n,k,p):
    return Coef(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k)
```

   (a) A quoi correspondent les paramètres n et p dans la fonction P ?

   (b) En utilisant ces fonctions, aider Anis à écrire un programme répondant à la question posée.

1.4 Approfondissements

Exercice 22:
Une urne contient 10 boules blanches et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On pioche une boule de l'urne et on note sa couleur avant de la remettre dans l'urne. On répète cette expérience de manière identique et indépendante jusqu'à obtenir une boule rouge.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Quelle est la probabilité de l'issue $\{X = 1\}$? Interpréter cette probabilité.

3. Quelle est la probabilité d'obtenir la première boule rouge au 5° tirage ? En 5 tirages maximum ?

4. A l'aide d'un programme Python, déterminer le nombre de tirages k pour que la probabilité d'obtenir la première boule rouge en moins de k tirages dépasse $0,99$.

Exercice 23:
On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooter à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n, qui totalise le nombre d'accidents de scooter à ce carrefour durant cette année, suit une loi binomiale.

On estime que l'espérance mathématiques de S_n, notée $\mathbb{E}(S_n)$, est égale à 10. Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis $\mathbb{P}(S_n = k)$ en fonction de n et k où $0 \leq k \leq 6$.

2. (a) Etablir l'égalité :

$$\ln(\mathbb{P}(S_n = 0)) = -10 \times \frac{\ln\left(1 - \frac{10}{n}\right)}{-\frac{10}{n}}$$

   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = e^{-10}$.

   (b) Démontrer que, pour tout $0 \leq k \leq n-1$:

$$\mathbb{P}(S_n = k+1) = \mathbb{P}(S_n = k) \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1}$$

   (c) Démontrer que :

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = e^{-10}\frac{10^k}{k!} \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = k+1) = e^{-10}\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}$$

   (d) Démontrer par récurrence que pour tout $0 \leq k \leq n$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = e^{-10}\frac{10^k}{k!}$$

3. On suppose que le nomlbre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $e^{-10}\frac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $\mathbb{P}(S_n = k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooter à ce carrefour.