1 Vecteurs, droites et plans de l'espace

1.1 Compétences Attendues

- Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.
- Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.
- Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan, trois vecteurs de l'espace, forment une base.
- Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.
- Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).

1.2 Exercices

Exercice 1:
Soit $ABCDEFGH$ un cube. On note I le centre du carré $ABCD$, J le centre du carré $EFGH$ et K le milieu de $[IJ]$.

1. Faire une figure.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. En déduire que K est le milieu de $[AG]$

Exercice 2:
Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. On note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[IJ]$. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MK}$.

Exercice 3:
Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.

1. On donne les vecteurs $\vec{u}=2\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ et $\vec{v}=-\vec{i}-2\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$.
   Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
2. Même question pour $\vec{u}=2\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+6\vec{j}-\frac{15}{2}\vec{k}$

Exercice 4:
Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.

1. Les vecteurs $\vec{e_1}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{e_2}=\vec{i}+\vec{k}$ et $\vec{e_3}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ sont-ils coplanaires ?
2. Même question pour $\vec{e_1}=\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{e_2}=6\vec{i}-3\vec{j}+16\vec{k}$
   et $\vec{e_3}=\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$.

Exercice 5:
Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace. On donne $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{k}$ et $\vec{w}=2\vec{i}+\vec{j}$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment-ils une base de l'espace ?

Exercice 6:
On considère le cube $ABCDEFGH$.

1. Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.
2. On note I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[HG]$.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Exercice 7:
On se place dans un repère de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1;-1;2)$, $B(5;1;8)$, $C(-3;2;-1)$ et $D(-1;3;2)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Que peut-on en déduire sur les droites (AB) et (CD) ?

Exercice 8:
On se place dans un repère de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1;3;5)$, $B(2;7;-1)$ et $C(5;19;-19)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 9:
On se place dans un repère de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1;2;3)$, $B(3;-1;2)$, $C(0;1;1)$ et $D(5;1;6)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que ces trois vecteurs sont coplanaires. Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?

Exercice 10:
On se place dans un repère de l'espace $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On considère les points $A(2;4;-1)$, $B(3;-2;5)$ et $C(6;7;-2)$.

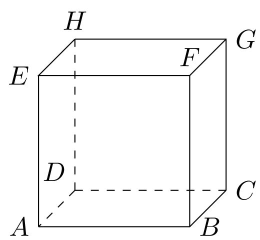
1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer les coordonnées du point I, milieu de $[BC]$.
3. Déterminer les coordonnées du point J tel que $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
4. Déterminer les coordonnées du point K tel que C soit le milieu de $[AK]$.

Exercice 11:

Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit.

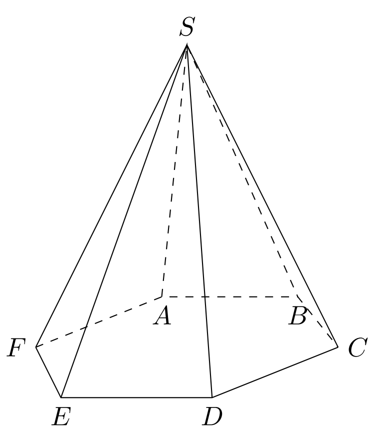
Les points M et N sont tels que :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AG}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CG}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{GN}$. Quelle est la nature du quadrilatère $EMNG$?



Exercice 12:
Soit $SABCDEF$ une pyramide de sommet S dont la base est un hexagone régulier.

1. $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont-ils coplanaires ?
2. $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BS}$ et $\overrightarrow{CS}$ sont-ils coplanaires ?
3. $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BS}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont-ils coplanaires ?

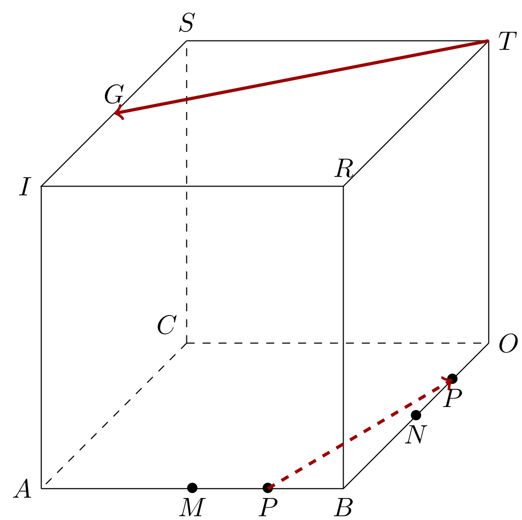


Exercice 13:
Soit $ABCD$ un tétraèdr. I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$.
Les points E et F sont tels que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$.

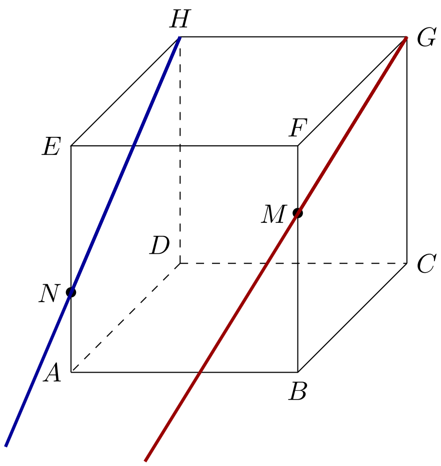
1. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{DI} = a + \overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$.
   Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$?
2. Montrer qu'il existe deux nombres réels c et d tels que $\overrightarrow{DJ} = c\overrightarrow{AC} + d\overrightarrow{AD}$.
   Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$?
3. Montrer que $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$.
4. En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{DF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DJ}$. Conclure.

Exercice 14:
$ABRICOTS$ est un cube. M, N et G sont les milieux respectifs de $[BA]$, $[BO]$ et $[IS]$. P et K sont les milieux respectifs de $[MB]$ et $[NO]$.

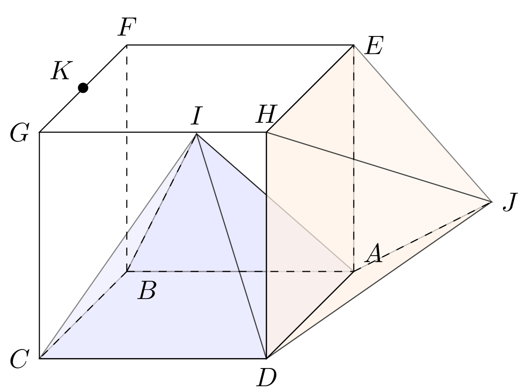
1. Exprimer $\overrightarrow{PK}$ puis $\overrightarrow{TG}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BO}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{PK}$ et $\overrightarrow{TG}$ sont(ils colinéaires ? Justifier.
3. Conclure sur les positions relatives des droites (PK) et (TG).



Exercice 15:
$ABCDEFGH$ est un cube. M est un point du segment $[EA]$ et N est un point du segment $[FB]$. Les droites (HM) et (GN) sont-elles sécantes, parallèles ou non coplanaires ? Justifier.



Exercice 16:
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête de longueur a. On construit à l'intérieur de ce cube une pyramide $IABCD$ et à l'extérieur une pyramide $JADHE$, identique à la précédente, dont les faces triangulairess sont des triangles isocèles.
On place le point K milieu de $[GF]$.
Déterminer la hauteur de la pyramide pour que les points K, I et J soient alignés.



1.3 Algorithmes et Python

Exercice 17:
Ecrire une fonction Python qui prend en argument les coordonnées de deux points A et B de l'espace et qui renvoie les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 18:
Expliquer la fonction Python définie ci-dessous.

```python
def col(vec1,vec2):
    #vec1 et vec2 sont des listes constituees
    #des coordonnees des vecteurs dont on
    #suppose qu'aucune n'est nulle.
    if vec1[0]/vec2[0]==vec1[1]/vec2[1]
        and vec1[0]/vec2[0]==vec1[2]/vec2[2]:
        return True
    else:
        return False
```

1.4 Approfondissements

Exercice 19:
On appelle fonction vectorielle de Leibniz la fonction qui, à quatre points pondérés $(A;a),(B;b),(C;c)$ et $(D;d)$ associe la somme :

$$a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}+d\overrightarrow{MD}$$

G est le point de l'espace tel que :

$$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}+d\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$$

C'est le barycentre des quatre points pondérés.

1. Montrer que, pour tout point M de l'espace, on a :

$$a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}+d\overrightarrow{MD}=(a+b+c+d)\overrightarrow{MG}$$

2. L'espace est muni du repère $(0;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$.

   (a) Montrer que si $a+b+c+d\neq 0$, alors :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{a+b+c+d}(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}+d\overrightarrow{OD})$$

(b) On définit une fonction `bary` qui prend en argument une liste de coordonnées de points du plan et la liste des coefficients de pondération associés (de somme non nulle) et renvoie les coordonnées du barycentre.

Par exemple, `bary([[1,2,3],[4,5,6]],[7,8])` renvoie les coordonnées du barycentre des points $A(1;2;3)$ et $B(4;5;6)$ affectés par des coefficients respectifs 7 et 8.
En utilisant le résultat de la question (a), compléter cette fonction `bary`.

```
1  def bary(points,coef):
2      xg=0
3      yg=0
4      zg=0
5      somme=sum(coef)
6      for p in range(len(points)):
7          xg=....
8          yg=....
9          zg=....
10     xg=xg/....
11     yg=yg/....
12     zg=zg/....
13     return [xg,yg,zg]
14
15 R=[2,5,-1]
16 S=[0,4,1]
17 T=[-1,0,3]
18 V=bary([R,S,T],[....,....,....])
```

3. On note $R(2;5;-1)$, $S(0;4;1)$, $T(-1;0;3)$ et $U(-2;8;-2)$.

(a) Utiliser la fonction `bary` pour déterminer les coordonnées du barycentre des points pondérés $(R;5)$, $(S;-3)$, $(T;2)$ et $(U;-1)$.

(b) Compléter les lignes 15 à 18 du programme ci-dessus qui détermine les coordonnées du point V tel que $RSTV$ soit un parallélogramme, en le définissant comme barycentre de $(R;r),(S;s),(T;t)$ à l'aide de la fonction `bary`.

(c) I est le milieu de $[TU]$, comparer `bary([T,U,S],[1,1,1])` et `bary([I,S],[2,1])`. Démontrer cette observation.