1 Continuité, dérivabilité et convexité

1.1 Compétences Attendues

- Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement.
- Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.
- Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence.
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction.
- Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f, de f' ou de f''.
- Lire sur une représentation graphique de f, de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion. Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Déterminer si la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Si elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, préciser l'intervalle sur lequel elle l'est.

1. $\begin{cases} \sqrt{-x-1} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ 4x - 4 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} e^{x-2} + 2 & \text{si} \quad x < 2 \\ -2x + 7 & \text{si} \quad 2 \leq x < 4 \\ \dfrac{2}{1-x} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

Exercice 2:
Dans chaque cas, déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} (ax+1)^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 13x + 3a & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ x^2 + bx + b & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -ax + b & \text{si} \quad x \leq -3 \\ (b-5)x + 6a & \text{si} \quad -3 < x < 1 \\ ax - b - 4 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Exercice 3:
Soient $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 - 1}{x^2 + 5}$ et $g : x \mapsto x^3 + 15x + 1$.

1. Etudier les variations de g puis déterminer les solutions de l'équation $g(x) = 0$ avec une précision de 10^{-2}.
2. Construire le tableau de signe de g.
3. Déterminer la dérivée de f et l'exprimer en fonction de g.
4. Donner le tableau de variation de f.

Exercice 4:
Soit $f : x \mapsto 0,4x^5 - 8x - 3$ définie sur $[-1; 3]$.

1. Donner le tableau de variation de f.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[2; 3]$.
3. Chercher une valeur approchée de cette solution à 10^{-2} près.

Exercice 5:

1. Montrer que l'équation $-2x^3 - 6x^2 + 18x + 59 = 0$ admet une unique solution réelle α.
2. Encadrer α au dixième près.

Exercice 6:
Soit $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 4x - 4$.

1. Déterminer les solutions de $f(x) = -4$.
2. Donner le tableau de variation de f.
3. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -12$.
4. Existe-t-il un réel y tel que l'équation $f(x) = y$ n'ait aucune solution ?

Exercice 7:
Montrer que l'équation $2e^{2x} = \sqrt{5-x}$ admet une unique solution α sur $]-\infty; 5]$ et que $\alpha \in [0; 1]$.

Exercice 8:
Montrer que l'équation $2(x-1)e^{x-1} = x^2$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [1,7\ ;\ 1,8]$.

Exercice 9:
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n + 1}$.

1. Déterminer la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Montrer que $[0;6]$ est stable par f.
3. On admet que (u_n) converge vers $l \in [0;6]$. Déterminer la valeur de l.

Exercice 10:
On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 4 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{5}$$

1. Déterminer la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Etudier les variations de f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
4. Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante.
5. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 11:
On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}$$

1. Déterminer la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Etudier les variations de f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
4. Montrer par récurrence que (u_n) est une suite positive et décroissante puis déterminer sa limite.

Exercice 12:
On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1,5 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$$

1. Déterminer la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $[1;2]$.
3. Démontrer que $[1;2]$ est stable par f.
4. Etudier les variations de la suite (u_n).
5. En déduire la convergence de la suite (u_n) et déterminer alors sa limite.

Exercice 13:
Pour chaque fonction f, déterminer son ensemble de dérivabilité puis calculer f'.

1. $f(x) = x^3 - 3 + 3\sqrt{x}$
2. $f(x) = (4x^3 + 2x - 1)^4$
3. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Exercice 14:
Pour chaque fonction f, déterminer son ensemble de dérivabilité puis calculer f'.

1. $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3$
2. $f(x) = e^{5x-2}$
3. $f(x) = (\sqrt{4x})^3$

Exercice 15:
Soit f une fonction définie et dérivable en x_0 de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère. Calculer $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ puis donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0.

1. $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 7}{x^2 + 1}, x_0 = 1$
2. $f(x) = (2x - 1)^{11}, x_0 = 0$

Exercice 16:
Soit f une fonction définie et dérivable en x_0 de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère. Calculer $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ puis donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0.

1. $f(x) = 3x - 2\sqrt{-x} - \frac{5}{x}, x_0 = -1$
2. $f(x) = \sqrt{5 - 2x}, x_0 = 2$

Exercice 17:
Calculer les dérivées secondes des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{4}{2x + 3}$
2. $f_2(x) = \frac{3x - 1}{x + 4}$
3. $f_3(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 1}$
4. $f_4(x) = \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 3)(x + 4)}$

Exercice 18:
Calculer les dérivées secondes des fonctions suivantes :

1. $f_5(x) = \sqrt{x^2 + 7x - 3}$
2. $f_6(x) = \cos(2x + 3)$

Exercice 19:
Calculer les dérivées secondes des fonctions suivantes :

1. $f_7(x) = (5x-1)^3$
2. $f_8(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$

Exercice 20:
Soit g la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
En utilisant la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1, établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$2\sqrt{x} \leq x+1$$

Exercice 21:
Etudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto -8x^3 + 48x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22:
Voici le tableau de variation de la fonction dérivé f' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-7;5]$.

x	-7		-2		-1		5
$f'(x)$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1
$f(x)$							

1. Déterminer le sens de variation de f.
2. Déterminer la convexité de f.
3. Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f.

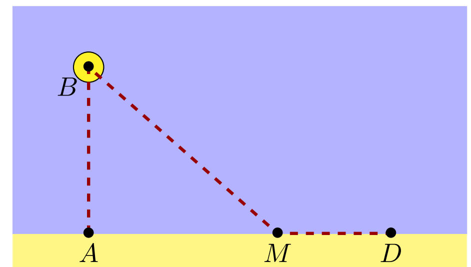
Exercice 23:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x + 6$.

1. Conjecturer la convexité de f à l'aide de la calculatrice.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Infirmer ou confirmer la conjecture émise à la première question.

Exercice 24:
Soit f la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$.

1. Donner la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisses 1.
3. En déduire que pour tout réel x, $e^x > x$.

Exercice 25:
La vitesse moyenne de course de Yasmine est $12,5$ km/h et celle de nage est $3,5$ km/h. A chaque entrainement, elle part du point D, elle court le long de la plage jusqu'à un point M dont la position varie, elle nage pour atteindre la bouée fixée dans l'eau au point B puis elle revient perpendiculairement à la plage pour arriver au point A comme sur le schéma ci-dessous.



La bouée est située à $\dfrac{6}{7}$ km de la plage et 4 km séparent le point D du point A.

1. On note $x = AM$. Montrer que le temps de parcours en fonction de la distance x est donné par :
$$f(x) = \frac{8-2x}{25} + \frac{2}{7}\sqrt{x^2 + \frac{36}{49}} + \frac{12}{49}$$
2. Yasmine peut-elle faire ce parcours en 45 minutes ?
3. Où placer le point M pour que Lucie fasse ce parcours en exactement 1h15 ? On donnera la distance AM au mètre près.

Exercice 26:
En Europe, il n'existe par de prédateur ou de régulateur naturel du frelon asiatique. Pour capturer les abeilles, le frelon asiatique se place en vol stationnaire à l'entrée d'une ruche.
On considère une ruche de 36000 individus qui subit une attaque d'une trentaine de frelons asiatiques à l'instant $t = 0$. On modélise le nombre restant d'abeilles dans la ruche (exprimé en dizaines de milliers) en fonction du temps (exprimé en minutes) par la fonction :
$$f : t \mapsto (2t + 3,6)e^{-0,53t}$$

1. Déterminer, approximativement, au bout de combien de minutes il ne reste plus qu'une abeille dans la ruche.
2. Déterminer au bout de combien de temps la vitesse d'extermination des abeilles augmente.

Exercice 27:

On appelle fonction "satisfaction" toute fonction dérivable à valeurs dans l'intervalle $[0; 100]$. Lorsque la fonction "satisfaction" atteint la valeur 100, on dit qu'il y a "saturation".

On définit aussi la fonction "envie" comme la fonction dérivée de la fonction "satisfaction". On dira qu'il a "souhait" lorsque la fonction "envie" est positive ou nulle et qu'il y a "rejet" lorsque la fonction "envie" est strictement négative.

1. On considère la fonction f dérivable sur $[0; 30]$ par $f(x) = 12,5xe^{-0,125x+1}$.
   (a) Déterminer une expression de f'.
   (b) Etudier le signe de f' sur $[0; 30]$ puis dresser le tableau de variation de f.
   (c) Justifier que la fonction f est une fonction de "satisfaction".

2. La directrice d'un réseau national d'agences de trekking utilise la fonction f définie ci-dessus et représentée ci-dessous pour modéliser la satisfaction de ses clients en fonction de la durée x de leur séjour, comprise entre 0 et 30 jours.

   (a) A quelle durée de séjour correspond l'effet "saturation" ?
   (b) A partir de quelle durée de séjou y-a-t-il "rejet" ?
   (c) On admet que f est deux fois dérivables sur $[0; 30]$, déterminer une expression de f''.
   (d) Etudier la convexité de f sur $[0; 30]$.
   (e) Placer les éventuels points d'inflexion et les tangentes à la courbe en ces points sur le graphique ci-dessus.
   (f) A partir de quelle durée de séjour peut-on estimer que la fonction "envie" se met à croître ? Justifier.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 28:

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il sait que le classement de la zone en "réserve marine" ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel chaque année :

- Entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine.
- Entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5% de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que pour tout entier n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.

On définit $f : x \mapsto 0,95x + 76$, on a ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. A l'aide d'un outil numérique, calculer les huits premiers termes de la suite (u_n).
3. (a) Démontrer que pour tout entier n, $u_n \geq 1520$.
   (b) Démontrer que la suit (u_n) est décroissante.
   (c) Justifier que (u_n) est convergente vers un nombre réel m que l'on déterminera.
4. Montrer que la réserve marine fermera un jour.
5. Recopier et compléter le fonction Python ci-dessous qui renvoie l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2000.

```python
def cetace():
    n=...
    c=3000
    while ...:
        n=...
        c=...
    return ...
```

Exercice 29:

La dichotomie permet d'approcher les solutions de l'équation $f(x) = 0$ où f est une fonction continue sur $[a; b]$ vérifiant $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

Il existe donc au moins une solution c de l'équation $f(x) = 0$.

(u_n) et (v_n) sont deux suites définies par récurrence, par leur premiers termes $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et :

- Si $f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) \leq 0$ alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$.
- Sinon $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

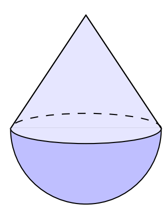
Ainsi, à chaque étape, on divise par deux l'amplitude de l'intervalle $[u_n; v_n]$ dans lequel se trouve la solution c.

1. (a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) décroissante.
   (c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite L.
2. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, f(u_n) \leq 0 \leq f(v_n)$.
   (b) En déduire que $f(L) = 0$.
3. La fonction f vérifiant les conditions précédentes, compléter cette fonction Python renvoyant un intervalle d'amplitude 10^{-p} encadrant une solution de l'équation $f(x) = 0$ appartenant à l'intervalle $[a; b]$.

```python
def dichotomie(f,a,b,p):
    u=a
    v=b
    while ...:
        if f(...)<=0:
            ...
        else :
            ...
    return [...,...]
```

Exercice 30:

Un solide est composé d'une demi-sphère surmontée d'un cône dont la hauteur mesure 5 cm de plus que son rayon de base r.



1. Montrer que le volume $V(r)$ de ce solide est égal à $\pi r^2 \left(r + \dfrac{5}{3}\right)$.
2. Justifier qu'il existe un unique rayon $r \in [4; 5]$ tel que $V(r) = 400$ cm^3.
3. Utiliser la fonction `dichotomie` de l'exercice précédent pour calculer un encadrement à 10^{-6} du rayon de ce solide lorsque le volume vaut 400 cm^3.

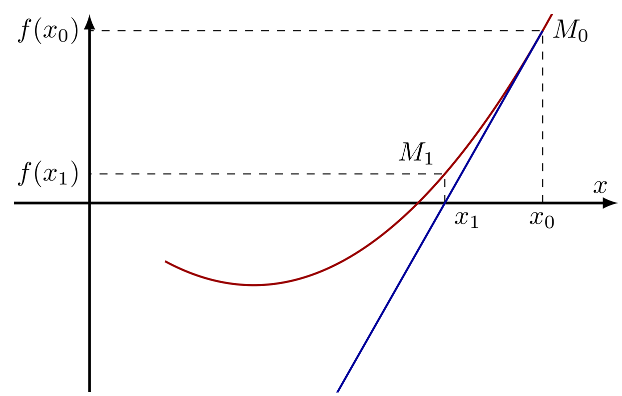
1.4 Approfondissements

Exercice 31:
Si une fonction f est n fois dérivable, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.
   Justifier que les fonction f, f' et f'' sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer une expression de $f^{(3)}(x)$.
2. On note x la fonction inverse. Pour tout $(x, n) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer une expression de $f^{(n)}(x)$ en fonction de n.

Exercice 32:
Soit f une fonction dérivable sur I de dérivée continue et strictement positive sur I, convexe et changeant de signe en c.

1. Pour approcher la valeur de c, on commence avec une première estimation de x_0 supérieure à c. On considère la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M_0(x_0; f(x_0))$: elle coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_1, permettant de répéter le processus avec un point M_1, etc...



La méthode de Newton consiste à étudier la suite (x_n). On souhaite montrer qu'elle converge vers c.

(a) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point M_0.

(b) Démontrer que cette tangente coupe l'axe (Ox) en un point d'abscisse :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

(c) En utilisant la convexité de f, justifier que $x_1 \geq c$.

(d) Justifier que la suite (x_n) est définie par la formule $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ et que pour tout entier n, $x_n \geq c$.

(e) Montrer que cette suite décroît.

(f) En déduire que la suite (x_n) converge vers c.

2. Soit $f : x \mapsto x^3 - x^2 + 0,5x - 0,7$ sur $I = [1;3]$.

(a) Vérifier que f est dérivable, de dérivée continue, strictement croissante et convexe sur I.

(b) Montrer qu'il existe un unique c de l'intervalle $]1;3[$ tel que $f(c) = 0$.

(c) Recopier et compléter les fonction en Python ci-dessous afin que la fonction `newton` renvoie la valeur de x_n.

```python
def f(x):
    return ...

def derivee(x):
    return ...

def newton(x,n):
    for i in range(n):
        x=...
    return x
```

(d) La tester avec $x_0 = 3$ et afficher les 10 premiers termes de la suite. Que remarque-t-on ?

Exercice 33:

Soit $\chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Montrer que $\chi_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point.