1 Orthogonalité et distance dans l'espace

1.1 Compétences Attendues

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace.
- Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.
- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures : longueur, angle, aire, volume.
- Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; lieux géométriques simples, par exemple plan médiateur de deux points.
- Déterminer une représentation paramétrique d'une droite. Reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique.
- Déterminer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point. Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne et préciser un vecteur normal à ce plan.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan donné par une équation cartésienne, ou sur une droite donnée par un point et un vecteur directeur.
- Dans un cadre géométrique repéré, traduire par un système d'équations linéaires des problèmes de types suivants : décider si trois vecteurs forment une base, déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base, étudier une configuration dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité, intersection et orthogonalité de droites ou de plans), etc. Dans des cas simples, résoudre le système obtenu et interpréter géométriquement les solutions.

1.2 Exercices

Exercice 1:
On donne trois points A, B et C de l'espace.
Dans chaque cas, calculer $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$:

1. $A(1;3;-5)$, $B(2;6;0)$ et $C(-4;1;-1)$
2. $A\left(\frac{2}{3};0;-2\right)$, $B\left(\frac{1}{2};0;\frac{4}{3}\right)$ et $C\left(0;0;-\frac{1}{7}\right)$
3. $A(6;\sqrt{2};-\sqrt{7})$, $B(2;3\sqrt{2};0)$ et $C(-5;-2\sqrt{2};-\sqrt{7})$
4. $A(\sqrt{5};1;0)$, $B(2;-2\sqrt{2};0)$ et $C(-1;-\sqrt{10};\sqrt{2})$

Exercice 2:
Soit $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, dans chaque cas, calculer $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$:

1. $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$
2. $\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{v} = -6\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$
3. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = -8\sqrt{2}\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}$

Exercice 3:
$SABCD$ est une pyramide telle que la base $ABCD$ est un carré de centre O et de côté 4 cm, $SA = SB = SC = SD = 6$ cm et I est le milieu de $[CB]$.

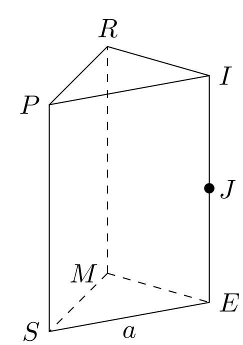
1. Faire un schéma.
2. Calculer

   (a) $\langle \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC} \rangle$
   (b) $\langle \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BD} \rangle$
   (c) $\langle \overrightarrow{SO}, \overrightarrow{SC} \rangle$
   (d) $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} \rangle$
   (e) $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \rangle$
   (f) $\langle \overrightarrow{SI}, \overrightarrow{OS} \rangle$

Exercice 4:

$PRISME$ est un prisme droite dont toutes les arêtes sont de longueurs a. J est le milieu de $[IE]$.
Calculer les produits scalaires suivants en fonction de a.

1. $\langle \overrightarrow{SE}, \overrightarrow{SI} \rangle$
2. $\langle \overrightarrow{PS}, \overrightarrow{SR} \rangle$
3. $\langle \overrightarrow{SE}, \overrightarrow{SM} \rangle$
4. $\langle \overrightarrow{PJ}, \overrightarrow{PI} \rangle$
5. $\langle \overrightarrow{SI}, \overrightarrow{SR} \rangle$
6. $\langle \overrightarrow{MR}, \overrightarrow{ES} \rangle$



Exercice 5:
Soit un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $\overrightarrow{u} = -5\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
Dans chaque cas, déterminer, si elles existent, les valeurs des nombres réels x et y telles que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux.

1. $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ y \end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \\ x \end{pmatrix}$
4. $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 9 \end{pmatrix}$

Exercice 6:
$A(2;1;0)$, $B(-3;0;2)$, $C(-1;0;3)$, $D(0;1;1)$ et $E(1;-8;-1)$ sont des points de l'espace.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Montrer que (ED) est orthogonale à (ABC).

Exercice 7:
$A(0;1;-1)$, $B(3;-2;0)$ et $C(3;-2;2)$ sont des points de l'espace.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan (ABC).

Exercice 8:
$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a.

1. Calculer les produits scalaires $\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle$ et $\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\rangle$.
2. En déduire $\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\rangle$.
3. Que peut-on conclure sur les droites (AB) et (CD)?

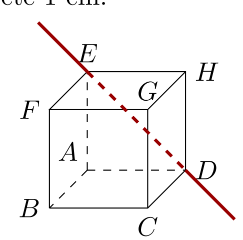
Exercice 9:
$A\left(2;-10;\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-2;-\frac{5}{2};-15\right)$ et $C\left(-\frac{25}{2};0;-1\right)$ sont des points de l'espace.

1. Déterminer la nature du triangle ABC.
2. Calculer les coordonnées du point I, milieu de $[BA]$.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 10:
$M(1;1;1)$, $N(1;-2;2)$ et $P(2;0;-2)$ sont des points de l'espace.

1. Montrer que le triangle MNP est rectangle.
2. Calculer l'aire de ce triangle.
3. Calculer la distance du point M à la droite (NP).

Exercice 11:
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1 cm.



1. Déterminer la nature du triangle BDE.
2. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal du point B sur la droite (DE) dans le repère orthonormé $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
3. Calculer la distance du point B à la droite (DE).

Exercice 12:
Soit un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.
Dans chaque cas, déterminer, si elles existent, les valeurs de $x\in\mathbb{R}$ telles que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux.

1. $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}k\\-2\\k-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}2\\k\\k\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}k\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}k+1\\-k\\2\end{pmatrix}$

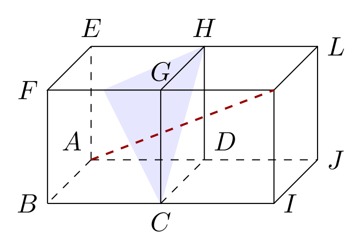
Exercice 13:
Soit le repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, les points $A(1;2;1)$ et $B(4;6;3)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que le point A et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à ce plan.

Exercice 14:
Soit le repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ et les points $A(1;2;1)$, $B(4;6;3)$, $C(0;3;1)$ et $D(-8;2;-3)$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal à ce plan.

Exercice 15:
On considère deux cubes, disposés comme dans la figure associée. M est le milieu de $[FG]$. On souhaite démontrer que (AK) est orthogonale au plan (MHC).

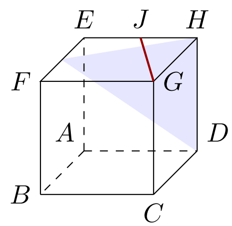


1. Démontrer que :
$$\langle\overrightarrow{AK},\overrightarrow{CM}\rangle=\langle\overrightarrow{BK},\overrightarrow{CM}\rangle$$
En déduire la valeur de ce produit scalaire.
2. En suivant cette méthode, calculer $\langle\overrightarrow{AK},\overrightarrow{HM}\rangle$. Conclure.

Exercice 16:
On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. On a I et J tels que :

$$\overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$$

1. Démontrer que (GJ) est perpendiculaire à (IH).
2. Démontrer que (GJ) est orthogonale à (HD).
3. En déduire que (GJ) est orthogonale à (ID).



4. Démontrer que le point d'intersection entre le plan (IHD) et la droite (GJ) a pour coordonnées $\left(\frac{4}{13}; \frac{7}{13}; 1\right)$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Exercice 17:
Un ébéniste construit un coffre à jouets dont la forme est un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. I et J sont les milieux respectifs de $[BC]$ et de $[AD]$, $AB = 8$ dm et $AE = AD = 3$ dm. L et K sont deux points des arêtes respectives $[EH]$ et $[FG]$ tels que $EL = FK = 2,5$ dm.

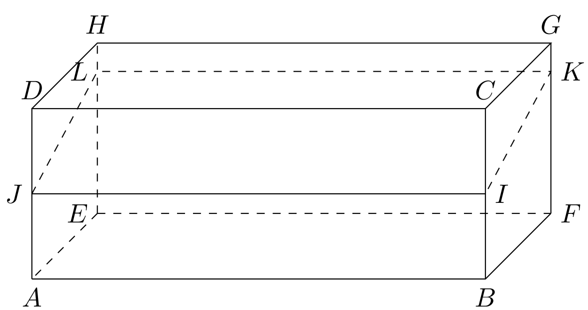


Figure 1 : Coffre fermé

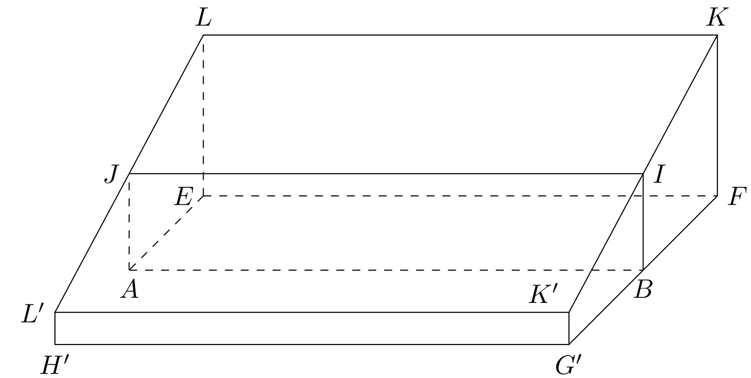


Figure 2 : Coffre ouvert

Le coffre s'ouvre suivant la charnière $[IJ]$. Pour le fabrique, on doit connaître $\widehat{CIK}$.
On se place dans le repère $\left(A, \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Justifier que ce repère est orthonormé.
2. Donner, sans justifier, les coordonnées de F et H.
3. (a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IK}$.
   (b) Calculer le produit scalaire $\langle \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IK} \rangle$.
   (c) En déduire une valeur approchée de $\widehat{CIK}$.

Exercice 18:
Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

1. $A(3; 2; 1)$ et $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. $A(0; 4; -5)$ et $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 19:
Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

1. $A\left(2; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$ et $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. $A\left(\frac{12}{7}; \frac{1}{7}; -\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

Exercice 20:
Dans chaque cas, déterminer un vecteur normal et un point appartenant au plan $\mathcal{P}_i$ défini par une équation cartésienne.

1. $\mathcal{P}_1 : 7x + 4y + z + 21 = 0$
2. $\mathcal{P}_2 : -13x + 3y + 5z - 15 = 0$

Exercice 21:
Dans chaque cas, déterminer un vecteur normal et un point appartenant au plan $\mathcal{P}_i$ défini par une équation cartésienne.

1. $\mathcal{P}_3 : \frac{5}{8}x - \frac{3}{7}y + \frac{4}{7} = 0$
2. $\mathcal{P}_4 : -\frac{1}{11}x + \frac{1}{3}z = \frac{1}{33}$

Exercice 22:
Soient A, B et C trois points et $\overrightarrow{n}$ un vecteur de l'espace. Dans chaque cas, justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés, puis vérifier que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC) et en déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

1. $A(1;-3;3)$, $B(5;-1;9)$, $C(-5;1;11)$ et $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -17 \\ 7 \end{pmatrix}$
2. $A(-4;0;-4)$, $B(6;4;-8)$, $C(4;-2;-6)$ et $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$

Exercice 23:
Etudier la position relative des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ puis déterminer, si possible, un point et un vecteur directeur de la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

1. $\mathcal{P}_1 : 2x + z - 13 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : x - 3y - 2z + 6 = 0$
2. $\mathcal{P}_1 : x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2 : 2x + y - 3z + 3 = 0$
3. $\mathcal{P}_1 : y + 3z - 1 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : 2x + 3y + z + 1 = 0$

Exercice 24:
Dans chaque cas, déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) et vérifier que le point C appartient à la droite (AB).

1. $A(8;3;4)$, $B(6;4;3)$ et $C(-2;8;-1)$
2. $A(-3;4;-1)$, $B(-1;-2;5)$ et $C\left(-\frac{1}{3};-4;7\right)$

Exercice 25:
Dans chaque cas, déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) et vérifier que le point C appartient à la droite (AB).

1. $A\left(2;\frac{2}{3};-\frac{5}{4}\right)$, $B\left(-\frac{3}{7};\frac{5}{6};\frac{1}{8}\right)$ et $C\left(\frac{48}{7};\frac{1}{3};-4\right)$
2. $A(\sqrt{2};-1;-3)$, $B(2;3;\sqrt{2})$ et $C(2\sqrt{2};3+4\sqrt{2};2+4\sqrt{2})$

Exercice 26:
On considère les droites d et d' définies par leurs représentation paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = -1-2t \\ y = 4+4t \\ z = -4-5t \end{cases} \quad \text{et} \quad d' : \begin{cases} x = 7+t \\ y = 8+3t \\ z = -18-6t \end{cases}$$

1. Démontrer que d et d' ne sont pas parallèles.
2. Résoudre le système : $\begin{cases} -1-2t = 7+t' \\ 4+4t = 8+3t' \\ -4-5t = -18-6t' \end{cases}$
3. En déduire que les droites d et d' sont sécantes en un point dont un précisera les coordonnées.

Exercice 27:
Démontrer que les droites d et d' définies ci-dessous ne sont pas coplanaires :
$d : \begin{cases} x = 4-3t \\ y = -3+t \\ z = 1+2t \end{cases}$ et $d' : \begin{cases} x = -12+2t \\ y = 4t \\ z = 9+3t \end{cases}$

Exercice 28:
Dans chaque cas, déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite d.

1. $A(2;-1;-3)$ et $d : \begin{cases} x = 9+2t \\ y = 2-t \\ z = 4+t \end{cases}$
2. $A(6;11;-7)$ et $d : \begin{cases} x = 13-3t \\ y = -3+2t \\ z = 17-4t \end{cases}$
3. $A\left(2;\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ et $d : \begin{cases} x = -3+t \\ y = -6+t \\ z = -\frac{40}{3}+4t \end{cases}$

Exercice 29:
Dans chaque cas, déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

1. $A(-2;4;-3)$ et $\mathcal{P} : 3x+y+4z-116=0$
2. $A(29;-10;7)$ et $\mathcal{P} : 5x-3y+2z+77=0$
3. $A\left(\frac{4}{3};-\frac{37}{3};\frac{11}{4}\right)$ et $\mathcal{P} : 12x+16y+5z+\frac{184}{3}=0$

Exercice 30:
On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1.
L'espace est muni d'un repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.
Soit M un point du segment $[HG]$. On note $m \in [0;1]$ tel que $\overrightarrow{HM} = m\overrightarrow{HG}$.

1. Montrer que, pour tout $m \in [0;1]$, le volume du tétraèdre $EMFD$ est égal à $\frac{1}{6}$ unités de volume.
2. Montrer que le plan (MFD) admet pour équation cartésienne :
$$(m-1)x+y-mz=0$$
3. On note K le projeté orthogonal du point E sur (MFD).
   (a) Déterminer les coordonnées de K en fonction de m.
   (b) En déduire que $EK = \dfrac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.
   (c) Déterminer la position du point M sur le segement $[HG]$ pour laquelle la longueur EK est maximale.
   (d) En déduire que lorsque la distance EK est maximale, le point K est le projeté orthogonal du point E sur la droite (DF).

Exercice 31:
On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ d'équations respectives:

- $\mathcal{P} : x+y+z=0$
- $\mathcal{L} : 2x+3y+z-4=0$

1. Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont sécants en une droite d dont on donnera une représentation paramétrique.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le plan :
$$\mathcal{P}_\lambda : (1-\lambda)(x+y+z)+\lambda(2x+3y+z-4)=0$$
Démontrer que, quel que soit λ, la droite d appartient au plan $\mathcal{P}_\lambda$.
3. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul et normal au plan $\mathcal{P}_\lambda$.
4. Déterminer un nombre réel λ, s'il existe, pour lequel :
   (a) Le plan $\mathcal{P}_\lambda$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
   (b) Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\lambda$ sont perpendiculaires.
5. Pour tout λ, déterminer une représentation paramétrique de la droite d_λ incluse dans le plan $\mathcal{P}_\lambda$, passant par le point $A(-4;4;0)$ et perpendiculaire à la droite d.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 32:
Ecrire une fonction `norme` en Python qui prend en argument trois réeels x, y et z et qui renvoie la norme de $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Exercice 33:
Ecrire une fonction en Python qui renvoie la distance entre deux points.

Exercice 34:
Ecrire une fonction `orthogonaux` en Python qui prend en argument deux listes représentant deux vecteurs de l'espace pour qu'elle renvoie `True` si les deux vecteurs sont orthogonaux et `False` s'ils ne le sont pas.

Exercice 35:
Ecrire une fonction `repere` en Python qui prend en argument trois listes représentant trois vecteurs de l'espace pour qu'elle renvoie `True` si les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux et `False` s'ils ne le sont pas.

Exercice 36:
Ecrire une fonction `sphere` en Python qui prend un argument :

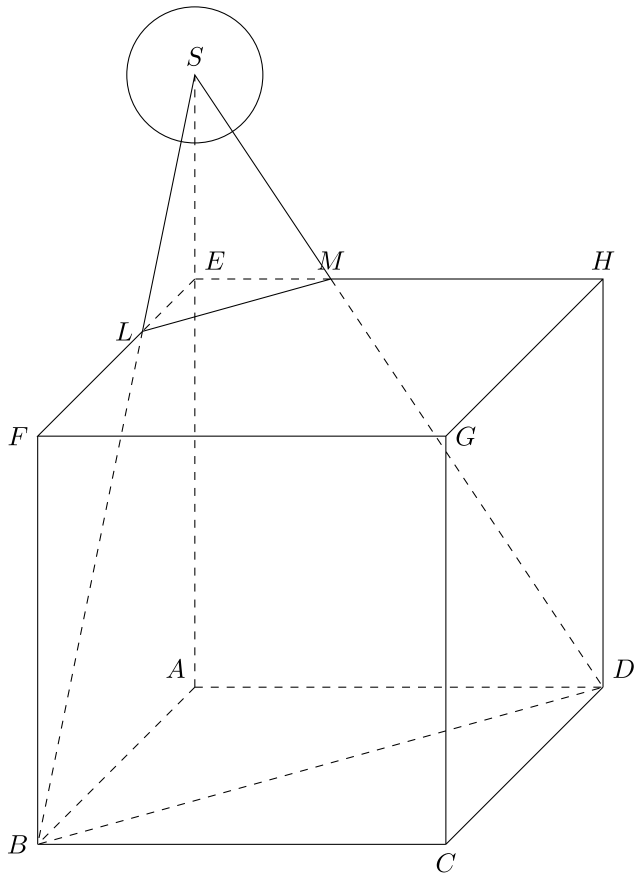
- Une liste représentant les coordonnées d'un point A de l'espace.
- Une liste de 3 listes représentant chacune les coordonnées d'un point de l'espace.

Cette fonction doit renvoyer `True` si les trois points donnés dans le deuxième paramètre sont sur une même sphère de centre A. Elle doit renvoyer `False` dans le cas contraire.

1.4 Approfondissements

Exercice 37:
Une papeterie réalise un presse-papier en bois. L'objet est composé d'un tétraèdre

$SELM$ posé sur un cube $ABCDEFGH$ de 6 cm d'arête, surmonté d'une sphère de centre S et de diamètre r cm, où $r \in \mathbb{R}$.



L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{FE}$. M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) et S est le point d'intersection des droites (BL) et (AE).
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A, \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AD}, \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AE}\right)$.

1. (a) Montrer que les coordonnées des points M et S sont respectivement $(0;2;6)$ et $(0;0;9)$.
   (b) Quel doit être le rayon de la sphère pour qu'elle soit tangente à la face $EFGH$ du cube ?
   Une sphère est tangente à un plan si la distance du centre de la sphère au plan est égale à son rayon.
   (c) Déterminer les nombres réels r pour que la sphère n'intersecte pas le cube.
2. (a) Démontrer que (LM) et (BD) sont parallèles.
   (b) La mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ doit être comprise entre 55° et 60°. Cette contrainte est-elle vérifiée ?
3. On sculpte ce presse papier dans du bois de masse volumique 1490 kg/m^3.
   Chaque tronc a une forme cylindrique d'environ 3 m de longueur et 10 cm de rayon et est vendu 150 euros.
   Quels sont la masse et le prix de revient d'un seul presse papier ?

Exercice 38:

1. On considère la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(1;-2;3)$ et de rayon 6 unités, ainsi que la droit d passant par $A(13;4;11)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une équation de la sphère $\mathcal{S}$ et une représentation paramétrique de la droite d de paramètre t.
   (b) Si on suppose que la sphère $\mathcal{S}$ et la droite d ont un point en commun, alors quelle équation (E) doit vérifier les paramètre t ?
   (c) Résoudre l'équation (E) et conclure sur les coordonnées des éventuels points d'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et de la droite d.
2. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de la sphère $\mathcal{S}$, de centre Ω et de rayon r, et de la droite d passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
   (a) $\Omega(-5;2;1), r = 9, A(-2;8;1)$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
   (b) $\Omega(-4;-2;5), r = 10, A(-7;2;-7)$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 39:
On considère la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(-3;-1;1)$ et de rayon 9 unités et le plan :

$$\mathcal{P} : \quad 2x + 7y + 4z - 60 = 0$$

Déterminer la nature de l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$. On précisera les éléments caractéristiques de cette intersection.