1 Primitives et équations différentielles

1.1 Compétences Attendues

- Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u)u'$.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + b (a \neq 0)$: déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.
- Pour une équation différentielle $y' = ay + f$: à partir de la donnée d'une solution particulière, déterminer toutes les solutions.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 3x$ et $F : x \mapsto x^3 - \frac{3}{2}x^2$.

1. Vérifier que F est une primitive de f.
2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en -1.

Exercice 2:
Déterminer sur $\mathbb{R}_+^*$ la primitive F de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} - 1$ vérifiant $F(1) = -1$.

Exercice 3:
Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto -3$
2. $x \mapsto 2x - \frac{1}{3}$
3. $x \mapsto \frac{x^2}{3} - x$
4. $x \mapsto 3x^2 + \frac{2x}{3} - 7$

Exercice 4:
Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de $f : x \mapsto e^x$ vérifiant $F(0) = e$.

Exercice 5:
Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 2x$ vérifiant $F(1) = 2$.

Exercice 6:
Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)^2}$ sur $]-\infty; 2[$
2. $x \mapsto \dfrac{2}{(x+3)^2}$ sur $]-3; +\infty[$

Exercice 7:
Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+2)^3}$ sur $\mathbb{R}$
2. $x \mapsto \dfrac{3x^2}{(x^3-1)^4}$ sur $]1 : +\infty[$

Exercice 8:
Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto e^x - 2e^{-x}$
2. $x \mapsto \dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$

Exercice 9:
Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$
2. $x \mapsto \dfrac{9x^2-3}{(x^3-x)^2}$ sur $]1 : +\infty[$

Exercice 10:
Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de $f : x \mapsto \sin(2t)$ vérifiant $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

Exercice 11:
Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y' = 2$
2. $y' = 1 - 2x$
3. $y' = 5x - 3$

Exercice 12:
Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y' = x^2$
2. $y' = x^3$
3. $y' = 3x^2 + 2x + 1$

Exercice 13:
Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y' = \dfrac{1}{x^3}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
2. $y' = x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. $y' = -e^x$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 14:
Dans chaque cas, résoudre les équations différentielles après les avoir transformés puis préciser l'ensemble de définition des solutions.

1. $x^2y' = -1$
2. $\sqrt{x}y' + 1 = 0$

Exercice 15:
Dans chaque cas, résoudre les équations différentielles après les avoir transformés puis préciser l'ensemble de définition des solutions.

1. $x^4y' = 3(x-1)^2$
2. $e^{2x}y' = -e^x$

Exercice 16:
Dans chaque cas, déterminer la solution F de l'équation différentielle donnée.

1. $y' = x - 1$ avec $F(1) = -1$
2. $y' = x^2 - x + 1$ avec $F(0) = 0$

Exercice 17:
Dans chaque cas, déterminer la solution F de l'équation différentielle donnée.

1. $y' = x^3 + x + \dfrac{1}{x^2}$ avec $F(1) = \dfrac{3}{4}$
2. $y' = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x^5}$ avec $F(-1) = 1$

Exercice 18:
Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y' - \dfrac{1}{2}y = 0$
2. $2y' - 3y = 8y + 4y'$
3. $5y' + 3y = 0$
4. $-\dfrac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0$

Exercice 19:
Dans chaque cas, déterminer la solution F de l'équation différentielle donnée.

1. $y' - \sqrt{2}y = 0$ avec $F(\sqrt{2}) = 1$
2. $2y' - 3y = 2y + 3y'$ avec $F(0) = 5$
3. $\dfrac{1}{2}y' + y = \dfrac{1}{2}y - y'$ avec $F(3) = \dfrac{1}{e}$

Exercice 20:
Soit f la solution de l'équation différentielle $(E) : 3y' - 6y = 1$ avec $f'(1) = 2$.

1. Déterminer $f(1)$.
2. Déterminer la solution f.

Exercice 21:
Montrer que $\phi : x \mapsto 3x - 1$ est solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = 9x$ puis donner toutes les solutions de (E).

Exercice 22:
Après avoir déterminé une fonction affine ϕ solution particulière de l'équation différentielle $(E) : 2y' - y = 2x$, déterminer la solution F de (E) telle que $F(0) = -2$.

Exercice 23:
Montrer que $\phi : x \mapsto x^2 - x - 1$ est solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' - 3y = 3x^2 + x + 2$, puis donner toutes les solutions de (E).

Exercice 24:
Montrer que $\phi : x \mapsto xe^{-x}$ est solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + y = e - x$ puis donner toutes les solutions de (E).

Exercice 25:
Déterminer les solutions de l'équation différentielle en cherchant une solution particulière ϕ de la forme indiquée.

1. $2y' + y = x + 1$ avec $\phi(x) = mx + p$
2. $y' + 3y = 2x - 1$ avec $\phi(x) = mx + p$

Exercice 26:
Déterminer les solutions de l'équation différentielle en cherchant une solution particulière ϕ de la forme indiquée.

1. $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ avec $\phi(x) = ax^2 + bx + c$
2. $2y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ avec $\phi(x) = ax^2 + bx + c$

Exercice 27:
Déterminer les solutions de l'équation différentielle en cherchant une solution particulière ϕ de la forme indiquée.

1. $y' + 3y = (2 + 2x)e^{-2x}$ avec $\phi(x) = (mx + p)e^{-2x}$
2. $y' + y = (3 - 2x)e^x$ avec $\phi(x) = (mx + p)e^x$

Exercice 28:
Déterminer les solutions de l'équation différentielle en cherchant une solution particulière ϕ de la forme indiquée.

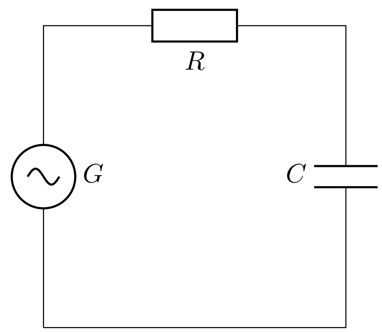
$$y' - 2y = -(3x^2 + x + 2)e^{-x} \quad \text{avec} \quad \phi(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

Exercice 29:

Un condensateur de capacité $C = 20\mu F$ est placé, avec une résistance $R = 1000\Omega$, dans un circuit électrique RC dont le générateur est une alimentation stabilisée délivrant une tension continue $E = 6V$. La charge q du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}$$

et elle est nulle à l'instant $t = 0$.



1. Ecrire l'équation vérifiée par q sous la forme $y' = ay+b$. Résoudre cette éqauation sur $\mathbb{R}_+$ et donner une expression de q en fonction de t.

2. Quelle charge le condensateur tend-il à avoir si on attend suffisamment ? Au bout de combien de temps atteint-il la moitié de cette charge ?

Exercice 30:
La vitesse de chute verticale v (en m/s) d'un objet de masse $m = 2$ kg vérifie l'équation:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m}v$$

où $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ est le norme du champ de pesanteur, $\gamma = 1,96$ kg/s le coefficient de frottement et t le temps (en s) écoulé depuis le début de la chute.

1. Ecrire l'équation vérifiée par v sous la forme $y' = ay+b$. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+$ et donner une expression générale de v en fonction de t.

2. Quel est le comportement de v lorsque t tend vers $+\infty$? Interpréter dans le contexte.

Exercice 31:
On place un capital de 2000 euros dans une banque aux taux d'intérêt annuel composé de $1,5\%$.

1. On note C_n la valeur du capital acquis au bout de n années de placement.

   (a) Donner une expression de C_n en fonction de n.

   (b) En supposant que ce capital évolue de manière journalière et en notant S_n sa valeur acquise au bout de n jours, justifier que, pour tout entier positif n, on a $S_n = 2000 \times \left(e^{\frac{1}{365}\ln(1,015)}\right)^n$

2. On suppose que le capital évolue à chaque instant et on note $f(t)$, en euros, sa valeur acquise après t années. On considère alors que f est dérivable et que, pour tout nombre réel strictement positif t, on a $f'(t) = 0,015f(t)$. Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$.

3. Comparer les valeurs acquises au bout de 3 jours, 125 jours, 1 an et 2 ans avec chacun des deux modèles proposés. Que constate-t-on ?

Exercice 32:
Dans une usine, la température d'un moteur thermique est régulée par un système de circulation d'eau de refroidissement. Quand la températurer de cette eau atteint 90°C, un ventilateur se met en action afin de refroidir le liquide dans le radiateur. Il s'arrête lorsque la température redevient inférieure à 50°C.
On mesure le temps t (n minutes) écoulé à partir de l'instant où le ventilateur se déclenche.
On admet que la température de l'eau, exprimée en degré Celsius, est donnée à l'instant t par $f(t)$ où la fonction f vérifie sur $[0,+\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E): \quad f' + 0,04f = k$$

avec $k \in \mathbb{R}$, $f(0) = 90$ et $f(10) = 77,14$.

1. Déterminer la solution f sur $[0;+\infty[$ de (E) qui vérifie les conditions initiales.

2. Le ventilateur va-t-il s'arrêter ? Justifier.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 33:
On considère des fonctions polynomiales :

$$f : x \mapsto a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \quad \text{avec} \quad (a_0; a_1; ...a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Pour modéliser en Python une telle fonction, on utilise une liste `P=[a0,a1,...,an]`.

1. (a) Recopier et compléter la fonction `image` suivante, qui calcule l'image dun ombre x par la fonction f, donnée sous la forme d'une liste P passée en paramètre.

```
def image(P,x):
    res=0
    for exp in range(0,len(P)):
        res=...
    return res
```

   (b) Tester la fonction avec $f : x \mapsto 1 + 4x + 9x^2$ pour $x = 2$.

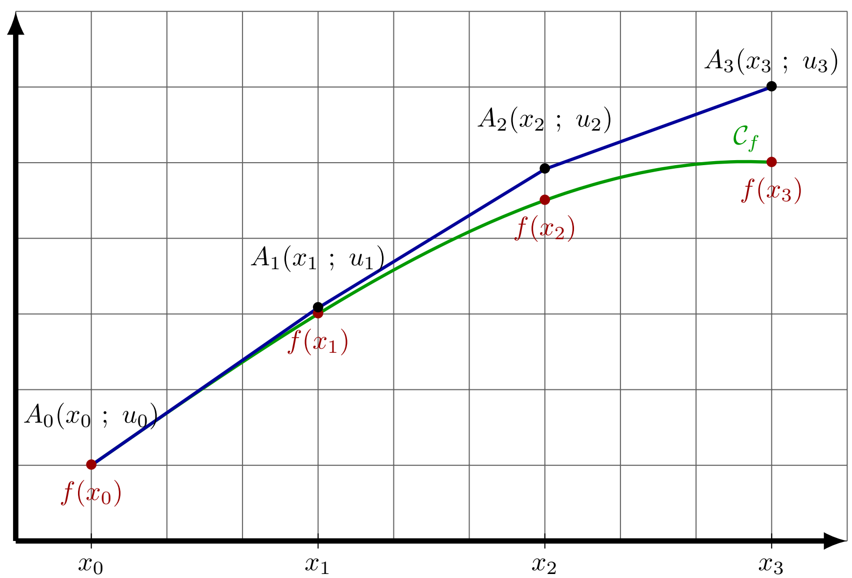
2. (a) Recopier et compléter la fonction `primitive` qui renvoie une liste correspondant à la primitive de f qui prend la valeur b en a.

```
def primitive(P,a,b):
    primi=[0]
    for exp in range(0,len(P)):
        primi.append(...)
    primi[0]=...
    return primi
```

   (b) En déduire la primitive F de $f : x \mapsto 1 + 4x + 9x^2$ telle que $F(1) = 2$

Exercice 34:
Lorsqu'il est difficile de trouver une primitive de g, on cherche une approximation ponctuelle d'une solution f de l'équation $y'(x) = g(x)$ sur un intervalle $[c; d]$ à l'aide de la méthode d'Euler.

- On décompose l'intevalle $[c; d]$ en :
  $[x_0; x_1] \cup [x_1; x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}; x_n]$ avec $x_0 = c$ et $x_n = d$.
- On approche alors la courbe représentative de f par la famille de segments $[A_i; A_{i+1}], i \in [|0; n-1|]$ où les coordonnées des points A_i sont notées $(x_i; u_i)$ avec $u_0 = f(x_0)$.
- Chaque valeur u_i est calculée en fonction de u_{i-1} en imposant à chaque segment d'être parallèle à la tangente à la courbe au point $(x_i; f(x_i))$.



1. Montrer que $u_{i+1} = g(x_i) \times (x_{i+1} - x_i) + u_i$ pour $0 \leq i \leq n-1$.
2. Recopier et compléter la fonction `euler`, qui prend en paramètre l'intervalle $I = [c; d]$ sous forme de liste, fc) et un pas p, écart constant entre x_i et x_{i+1} pour $0 \leq i \leq n-1$ et qui renvoie la liste des x_i et la liste des u_i.

```
def euler(I,fc,p):
    c=I[0]
    liste_x=[...]
    liste_u=[...]
    i=0
    while ...<=...:
        i=i+1
        liste_x.append(c+i*p)
        liste_u.append(...)
    reutrn [liste_x,liste_u]
```

3. Appliquer la méthode d'Euler à la résolution de $y'(x) = x^2 - 2x + 1$ avec un pas de 10^{-2} pour trouver un approximation de la solution f vérifiant $f(0) = 2$, puis représenter l'ensemble des points obtenus de coordonnées $(x_i; u_i)$ grâce au module `matplotlib`.
4. Trouver la solution exacte de cette équation et la représenter avec son approximation dans le même repère. Evaluer alors la qualité de l'approximation.

1.4 Approfondissements

Exercice 35:
On considère l'équation différentielle d'inconnue y :

$$(E) : \quad y' = ky(A - y)$$

où $(A, k) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$.

1. On suppose que y est solution de (E) sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ et ne s'y annule pas et on pose $z = \dfrac{1}{y}$. Montrer que z est solution d'une équation différentielle que l'on écrira en fonction de k et de A.
2. En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme :

$$y : x \mapsto \frac{A}{1 + Be^{-kAx}} \quad \text{avec} \quad B \in \mathbb{R}$$

3. Proposer l'allure des courbes représentatives de ces solutions en fonctions des signes de k et B.

Exercice 36:
On considère l'équation différentielle d'inconnue y :

$$(E): \quad y'' - y' - 2y = 2xe^x$$

Cette équation différentielle est une équation différentielle du second ordre avec second membre.

1. Soient $A, B \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ est une équation particulière de l'équation homogène associée :

$$(E_0): \quad y'' - y' - 2y = 0$$

   On admet que toutes les solutions de (E_0) sont de cette forme.

2. Déterminer une solution particulière ϕ de (E) de la forme $x \mapsto (mx+p)e^x$.
3. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que g et g' soient dérivables sur $\mathbb{R}$. Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - \phi$ est solution de (E_0).
4. Résoudre (E) et déterminer la solution h de (E) telle que $h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$.

Exercice 37:
On veut résoudre l'équation différentielle d'inconnue y :

$$(E): \quad y'' - y' - 6y = -6x^2 + 4x - 3$$

Cette équation différentielle est une équation du second ordre avec un second membre.

1. Montrer que l'équation (E) admet comme solution une fonction polynôme du second degré ϕ que l'on déterminera.
2. Soit g une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si, $g - \phi$ est solution de l'équation différentielle homogène :

$$(E_0): \quad y'' - y' - 6y = 0$$

3. On admet que si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ associée à l'équation différentielle du second ordre $ay'' + by' + cy = 0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ sont de la forme $x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}, A, B \in \mathbb{R}$.
   (a) Résoudre l'équation (E_0).
   (b) En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$.