1 Calcul intégral

1.1 Compétences Attendues

- Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties.
- Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
- Calculer l'aire entre deux courbes.
- Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence.
- Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-5}^{7} \sqrt{2}dx$
2. $\int_{3}^{14} \frac{1}{x}dx$
3. $\int_{-2}^{4} (x^2+3x+4)dx$

Exercice 2:
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{0}^{10} e^{-5x}dx$
2. $\int_{-1}^{1} (x^4-x^2+x-1)dx$
3. $\int_{-2}^{2} (8x^5+5x^3+2x)dx$

Exercice 3:
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{0}^{1} e^{2x}dx$
2. $\int_{1}^{9} \frac{3}{2\sqrt{x}}dx$
3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} 1-\sin(2x)dx$
4. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x}$
5. $\int_{3}^{7} \frac{dx}{x^2}$
6. $\int_{1}^{2} \frac{x+1}{x^2}dx$

Exercice 4:
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-3}^{3} (x^5+2x^3-2x)dx$
2. $\int_{-2}^{4} 2xe^{x^2}dx$
3. $\int_{0}^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)dx$

Exercice 5:
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-3}^{3} \cos(x)dx$
2. $\int_{0}^{4} \frac{2x}{1+x^2}dx$
3. $\int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}dx$

Exercice 6:
Pour tout réel $x > -1$, on pose $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

1. Montrer que pour tout $x > -1, f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]-1;+\infty[$.
3. Calculer alors $\int_{1}^{3} f(x)dx$.

Exercice 7:
Soit f la fonction définie pour tout réel x par $\left\{\begin{array}{lll} x^2+x & \text{si} & x<-1 \\ 2x^3-x+1 & \text{si} & x \geq -1 \end{array}\right.$.

Calculer $\int_{-4}^{1} f(t)dt$.

Exercice 8:
Soit $I = \int_{0}^{1} \frac{x}{x+1}dx$.

1. Expliquer pourquoi $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ ne correspond à aucune forme de dérivée connue.
2. Déterminer deux réels α, β tels que pour tout $x \neq -1, f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x+1}$.
3. En déduire que $I = 1 - \ln(2)$.

Exercice 9:
En remarquant que pour tout réel t, $t^3 = t^3 + t - t$, calculer $\int_{0}^{1} \frac{t^3}{t^2+1}dt$.

Exercice 10:
Calculer l'intégrale $\int_1^2 \frac{3u^2+2u-1}{u}du$.

Exercice 11:
Calculer $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$.

Exercice 12:
Calculer astucieusement les intégrales suivantes :

1. $I = \int_1^2 e^x dx + \int_0^1 \left(x - \frac{1}{e^{-x}}\right) dx$
2. $J = \int_1^2 2xe^{x^2+x}dx + \int_1^2 e^{x^2+x}dx$

Exercice 13:
Soient f, g deux fonctions continues sur $[1;2]$ telles que :

$$\int_1^2 f(x)dx = 2 \quad \text{et} \quad \int_1^2 g(x)dx = -3$$

1. Calculer $\int_1^2 (5f(x) - g(x))dx$
2. Calculer $\int_1^2 \left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{2}{3}g(x)\right) dx$

Exercice 14:
A l'aide d'une intégration par partie, calculer $\int_0^\pi x\cos(x)dx$ et $\int_1^4 x\ln(x)dx$.

Exercice 15:
Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_1^2 4xe^{3x-1}dx$
2. $\int_0^1 xe^{4+5x}dx$
3. $\int_{-1}^1 (x+3)e^{-x}dx$

Exercice 16:
Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_{-1}^1 2x^3e^{x^2-1}dx$
2. $\int_0^1 \frac{x}{(5x+3)^2}dx$
3. $\int_{-1}^0 \frac{5x}{(3x-9)^3}dx$

Exercice 17:
Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_{-1}^3 3x^2e^{x^2}dx$
2. $\int_0^2 4(2x+1)^3e^{x^2+x-1}dx$

Exercice 18:
A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $\int_0^1 x^2e^x dx$.

Exercice 19:
Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}dx$.

1. Calculer la valeur exacte de I_0.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer uqe pour tout entier n on a :

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

3. En déduire les valeurs de I_1 et I_2.

Exercice 20:
On pose $I = \int_0^\pi e^x\cos(x)dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^\pi e^x\sin(x)dx$.
2. A l'aide d'une nouvelle intégration par parties, montrer que $I = e^\pi - 1 - I$.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 21:
On définit la suite (I_n), telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$.

1. Calculer $I_0 + I_1$ et I_1. En déduire la valeur de I_0.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n. En déduire les valeurs de I_3 et I_4.
3. Comparer e^{nx} et $e^{(n+1)x}$ pour $x \in [0;1]$. En déduire, sans essayer de calculer I_n, que la suite (I_n) est croissante.
4. (a) Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$.
   (b) En déduire un encadrement de (I_n).
   (c) Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

Exercice 22:
La suit (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 (1+t^n)dt$.
Prouver que (I_n) est décroissante. Est-elle convergente ?

Exercice 23:
Pour tout entier n, on pose $u_n = \int_0^n e^{-x^2}dx$. On ne cherchera pas à calculer u_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$.
   En déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_n < \frac{e}{2}$.
3. Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice 24:
Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^\pi x^2 \cos(nx)dx$. A l'aide d'une double intégration intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.

Exercice 25:
Soit (I_n) la suite définie pour tout entier n par $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t}dt$.

1. (a) Calculer I_0 et I_1.
   (b) Exprimer I_2 en fonction de I_1 puis en déduire I_2.
   (c) Exprimer I_3 en fonction de I_2 puis en déduire I_3.
2. (a) Démontrer que pour tout entier $n, I_n \geq 0$.
   (b) Etudier le sens de variation de la suite I.
   (c) Démontrer que la suite (I_n) est convergente.
3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \geq 1, I_n \leq \frac{1}{ne}$.
   (c) En déduire la limite de la suite (I_n).

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 26:
Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $[1;2]$.

1. Calculer $I = \int_1^2 f(x)dx$.
2. (a) Quels sont le sens de variation et le signe de f sur $[1;2]$?
   (b) En déduire que, pour tous $a < b \in [1;2]$ on a :

$$\frac{b-a}{b} \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{b-a}{a}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on subdivise m'intervalle $[1;2]$ en n intervalles $\left[1+\frac{k}{n};1+\frac{k+1}{n}\right]$ d'amplitude $\frac{1}{n}$.
   (a) Montrer que, pour tout $0 \leq k < n$:

$$\frac{1}{(n+1)+k} \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n+k}$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+1)+k} \leq I \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

4. On note (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+1)+k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}$$

   En déduire que (v_n) est décroissante et qu'elle converge vers une limite l.
   (b) Montrer de la même manière que (u_n) est croissante et qu'elle converge vers une limite l'.
   (c) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n - u_n = \frac{1}{2n}$.
   (d) En déduire que $l = l' = I$.
5. (a) Recopier et compléter la fonction en Python qui renvoie le n-ième terme de la suite (u_n).

```python
def un(n):
    u=...
    for i in range(0,n):
        u=u+1/...
    return ...
```

(b) Coder une fonction `vn` qui renvoie le n-ième terme de la suite (v_n).

(c) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, pour quelle valeur de n a-t-on $v_n - u_n = 10^{-p}$?

(d) Coder une fonction `rectangle` prenant en paramètre un nombre entier p et renvoyant un encadrement de I d'amplitude 10^{-p}

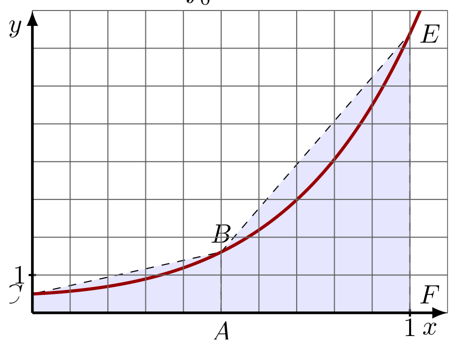
(e) En déduire une valeur approchée de 10^{-4} de $\ln(2)$.

Exercice 27:

Soit $g : x \mapsto xe^{2x} + \dfrac{1-x}{2}$. $\mathcal{C}_g$ est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonale. On cherche une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_0^1 g(t)dt$.

1. Donner une interprétation géométrique de I.

2. On subdivise $[0;1]$ en deux intervalles d'amplitude $0,5$.
   En utilisant les trapèzes $OABC$ et $ABEF$ construits ci-contre, donner une valeur approchée de I.



3. On subdivise l'intervallke $[0;1]$ en n intervalles $\left[\dfrac{k}{n}; \dfrac{k+1}{n}\right]$ d'amplitude $\dfrac{1}{n}$ et on construit selon le même procédé des trapèzes sous la courbe $\mathcal{C}_g$ sur chacun des n intervalles.
   Montrer que la valeur approchée de I, ainsi obtenue est
$$I_n(g) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{g\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k+1}{n}\right)}{2}$$

4. (a) Recopier et compléter la fonction en Python `trapeze` qui prend en argument le nombre n de trapèzes et une fon,ction f et qui renvoie la somme des aires des n trapèzes construits, comme dans la question précédente, à partir de la courbe représentative de f.

```python
def trapeze(f,n):
    aire=...
    for k in range(n):
        aire=aire+(f(k/n)+...)(2*n)
    return aire
```

   (b) Utiliser ce programme pour déterminer des valeurs approchées de I en prenant pour valeurs de n : 10, 50, 100, 1000.

1.4 Approfondissements

Exercice 28:

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. Démontrer que la suite (I_n) tend vers 0.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1}$.

3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 29:

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$

2. $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx$

Exercice 30:

Pour $n \geq 1$, donner une primitive de $x \mapsto \ln^n(x)$.

Exercice 31:

La suite (H_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et la fonction f est définie pour tout $x \in [1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Etudier le sens de variation de (H_n).

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$$

3. (a) En utilisant la relation de Chasles, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$H_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq H_n$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$

   (c) Déterminer la limite de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.