1 Loi des grands nombres

1.1 Compétences Attendues

- Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.
- Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.
- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi.

1.2 Exercices

Exercice 1:
Pour chacune des situations ci-dessous, indiquer si la variable aléatoire S suit une loi binomiale, justifier.

1. On tire avec remise 3 boules dans une urne contenant 4 boules vertes et 6 boules noires. Pour chaque tirage, la variable aléatoire X_i vaut 1 si la boule du tirage i est verte et 0 sinon. On note $S = X_1 + X_2 + X_2$.
2. On prelève sans remise les cinq jetons numérotés de 1 à 5 d'une urne. Y_j est la variable aléatoire qui, à chaque tirage, vaut 1 si le numéro du j-ième tirage a un numéro pair et 0 sinon. On note $S = X_1 + ... + X_5$.
3. On tire une carte d'un jeu de 52 cartes et on note Z_1 la variable aléatoire qui vaut 1 si cette carte est un valet et 0 sinon. On remet la carte dans le jeu et on tire avec remise cinq autres cartes en définissant de même $Z_2, ..., Z_6$. On note $S = X_1 + ... + X_6$.

Exercice 2:
Chaque vendredi, Serena achète un ticket d'un jeu de hasard pour lequel la probabilité de gagner de l'argent est $0,05$. On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si Serena a eu un ticket gagnant la semaine i.

1. On note $S = X_1 + ... + X_{52}$. Interpréter S dans le contexte de l'énoncé et déterminer sa loi de probabilité.
2. Calculer et interpréter la probabilité de l'événement $\{S > 0\}$.

Exercice 3:

1. On lance quatre dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6 et oncompte le nombre de faces "1" obtenues. On note H la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le nombre de "1" obtenus.
   Justifier que H peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre. En déduire la loi de probabilité de H.
2. Déterminer de même la loi de probabilité de la variable aléatoire T comptant le nombre de faces "1" obtenues après le lancer de trois dés équilibrés à quatre faces numérotées de 1 à 4.
3. Comparer les probabilités d'obtenir au moins deux faces "1é lors de chacune des deux expériences aléatoires décrites en (a) et (b).

Exercice 4:
Afin de mieux sécuriser les achats en ligne, certaines cartes bancaires ont un cryptogramme dynamique : ce code de sécurité qui figure au dos de la carte change chaque heure de manière aléatoire. Chaque cryptogramme est composé de trois chiffres et le combinaisons de trois chiffres identiques sont exclues.

1. Combien de cryptogrammes différents la carte bancaire peut-elle générer ?
2. Combien de cryptogrammes comportent deux fois le même chiffre ?
3. On note D la variable aléatoire valant 1 si le cryptogramme comporte deux fois le même chiffre et 0 sinon. Etablir la loi de probabilité de de D.
4. $(D_1, ..., D_{24})$ est un échantillon de taille 24 de la variable aléatoire D et $S = D_1 + ... + D_{24}$. Calculer $\mathbb{P}(S \geq 2)$ et interpréter ce résultat.

Exercice 5:
Dans un magasin de jardinage, on réalise des semis de tomates. Il est constaté que les semis, plantés dans des pots séparés et cultivés dans les mêmes conditions, survivent au bout de 2 mois dans 78% des cas.

1. On note V la variable aléatoire qui, à chaque semis, associe 1 s'il est vivant au bout de 2 mois et 0 sinon. Etablir la loi de probabilité de V.
2. 500 semis ont été plantés, on les modélise par un échantillon $(V_1, \dots, V_{500})$ de taille 500 de V et on note $S = V_1 + \cdots + V_{500}$. Déterminer la loi de probabilité de S.
3. Calculer la probabilité de $\mathbb{P}(S > 400)$ et interpréter ce résultat.

Exercice 6:
Soit $X \sim \mathcal{B}(10; 0,5)$ et Y prend ses valeurs dans $[|0; 10|]$ de manière équiprobable.

1. Justifier que X et Y ont la même espérance.

2. Calculer l'écart type de X et de Y. Interpréter la différence entre ces deux valeurs.

Exercice 7:
(B_1, B_2, B_3) est un échantillon de taille 3 de la loi de Bernoulli de paramètre $0,5$. On note $D = 2B_1$, $S = B_2 + B_3$ et U la variable aléatoire qui prend ses valeurs $[|0;2|]$ de manière équiprobable.

1. Déterminer les lois des variables aléatoires D, S et U.
2. Comparer les espérance des ces variables aléatoires.
3. Comparer les écarts types de ces variables aléatoires.

Exercice 8:
D et U sont deux variables aléatoires indépendantes prenant leurs valeurs de manière équiprobable dans $[|0;9|]$.

1. Déterminer l'espérance et l'écart type de U.
2. On note $N = 10D + U$.
   (a) Justifier que N prend ses valeurs dans $[|0;99|]$.
   (b) Calculer l'espérance et l'écart type de N.
   (c) La variable aléatoire N a-t-elle la même loi de probabilité qu'une variable aléatoire prenant ses valeurs de manière équiprobable dans $[|0;99|]$? Justifier.

Exercice 9:
Un éditeur réalise un sondage sur la présence de pages TICE dans se futurs manuels : chaque sondé peut répondre par "pour" ou par "contre" et on note p la probabilité qu'un sondé réponde "pour".

1. Justifier que la variable aléatoire R qui à un sondé pris au hasard, associe 1 s'il répond "pour" et 0 sinon, suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
2. On note $(R_1, ..., R_{800})$ un échantillon de taille 800 de la loi de la variable aléatoire R et on suppose qu'il modélise les réponses apportées par 800 personnes au sondage. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $S = R_1 + ... + R_{800}$.
3. Le sondage a conclu que 61% des dondés étaient favorables à la présence de pages TICE. En supposant que $p = 0,61$, quelle est la probabilité que, sur un sondage de 800 personnes, la proportion de "pour" soit comprise entre 56% et 75% ? Supérieure à 85%?

Exercice 10:
Afin de financer son congrès, une association propose le jeu de hasard suivant :

- Pendant 12 semaines, des tickets sont vendus à 1 euro l'unité. Chaque joueur peut en acheter au plus un par semaine et un ticket rapporte 5 euros avec la probabilité $0,1$ et 0 euro sinon.
- Au bout des 12 semaines, si le joueur a joué aux 12 tirages, il est sélectionné pour le grand final, s'il mise 5 euros, il peut gagner le gros lot.

1. On note X la variable aléatoire qui donne le bénéfice de l'association pour un unique ticket du tirage hebdomadaire. Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de X.
2. On note Y la variable aléatoire qui donne le bénéfice de l'association pour le grand final : parmi les n joueurs qui y participeront, un seul gagnera le gros lots d'un montant de m euros.
   Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de Y en fonction de n et m.
3. Au vu des années passées, l'association espère écouler 2000 tickets hebdomadaires sur les 12 semaines et que 150 adhérents se qualifient pour le tirage. Déterminer la valeur de m afin que l'association puisse faire un bénéfice d'au moins 700 euros.

Exercice 11:
Majorer la probabilité d'avoir un écart à la moyenne supérieur ou égal à 2 lorsque $\mathbb{V}(X) = 1$.

Exercice 12:
Sur les vingt matchs précédents, une équipe de rugby a marqué 602 points. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués au cours d'un match.

1. Que vaut l'espérance de X ?
2. On suppose que la variance est égale à $0,67$. Majorer la probabilité qu'au cours du prochain match, l'écart entre le nombre de points marqués et la moyenne soit supérieur ou égal à 1.
3. Minorer la probabilité que la probabilité que l'écart entre le nombre d'essais marqués et la moyenne soit strictement inférieur à 2.

Exercice 13:
Dans une gare, le nombre moyen de passagers par jor est évalué à 5000 avec une variance de 2500. Majorer la probabilité que l'écart entre le nombre de visiteurs enregistré lors d'une journée et la moyenne soit supérieur ou égal à 100.

Exercice 14:
Ahmed joue 1000 fois à pile ou face avec une pièce équilibrée. Minorer sa probabilité d'obtenir entre 480 et 520 faces à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis comparer le résultat obtenu avec celui que donne la loi binomiale.

Exercice 15:
On effectue n tirages avec remise d'une carte d'un jeu de 32 cartes. Pour le i-ième tirage, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si la carte est un pique et 0 sinon.

1. Donner l'espérance et la variance de X_i.

2. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne :

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

3. Quelle est la valeur minimale de n, pour laquelle la probabilité de s'écarter de l'espérance d'au moins $0,1$ soit inférieur à $0,05$?

Exercice 16:
Dans une classe de 25 élèves, 10 sont des garçons. On effectue n tirages avec remise d'un élève de cette classe pour l'interroger.
Pour le i-ième tirage, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si la personne interrogée est un garçon et 0 sinon.

1. Donner l'espérance et la variance de X.

2. En déduire l'espérance et la variance de la varianle aléatoire moyenne $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

3. Quelle est la valeur minimale de n, pour laquelle la probabilité de s'écarter de l'espérance d'au moins $0,1$ soit inférieur à $0,05$.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 17:

1. La fonction en Python `bern` suivante simule une loi de Bernoulli dont la paramètre p dépend des arguments i et j de cette fonction.

```python
import random as rd
def bern(i,j):
    if rd.randint(1,i+j)<=i:
        return i
    return 0
```

   Exprimer p en fonction de i et j.

2. (a) Une urne contient 8 boules rouges et 10 boules bleues. On prélève au hasard sans remise cinq boules dans cette urne et on compte le nombre de boules rouges. On simule cette situation avec la fonction `hg` suivante qui s'appuie sur la fonction `bern` précédente.

```python
def hg(i,j,k):
    x=0
    for exp in range(k):
        if bern(i,j)==1:
            x+=1
            i-=1
        else:
            j-=1
    return x
```

   Expliquer le rôle de chacun des arguments i, j et k de cette fonction et en donner les valeurs pour la situation étudiée.

   (b) Recopier et compléter la fonction `mu` suivant qui renvoie une estimation de l'espérance de la varariable aléatoire simulée par la fonction `hg` à partir d'un échantillon de taille n.

```python
def mu(i,j,k,n):
    m=0
    for simu in range(...):
        m=...
    return ...
```

   (c) Quel appael de la fonction `hg` doit-on faire pour simuler dix tirages sans remise dans un urne contenant 10 boules vertes,12 boules rouges et 8 boules bleues et que la fonction renvoie la nombre de boules vertes prélevées?

Exercice 18:
Une boîte de 100 bouchées sucrées comporte 15 meringues.

1. Expliquer pourquoi on ne peut pas modéliser par une loi binomiale la variable aléatoire qui compte le nombre de meringues parmi 20 bouchées prises au hasard.

2. Recopier et compléter la fonction en Python `bern` ci-dessous afin qu'elle simule le tirage d'une bouchée dans une boîte qui contient `d` bouchées dont `m` meringues en renvoyant 1 si la bouchée est une meringue et 0 sinon.

```python
import random as rd
def bern(m,d):
    if rd.randint(...)<=...:
        return 1
    return 0
```

3. On suppose que les bouchées sont distribuées de manière aléatoire. Recopier et compléter la fonction `sim` afin qu'elle simule le nombre de maringues distribuées après la distribution de 20 bouchées.

```python
def sim():
    d=100
    m=15
    for bisc in range(...):
        if bern(m,d)==...:
            m=...
        d=...
        if m==0:
            return 15
    return 15-m
```

4. On note S la variable aléatoire comptant le nombre de meringues distribuées. Estimer la probabilité $\mathbb{P}(S = 15)$.

5. Estimer $\mathbb{E}(S)$ par simulation.

Exercice 19:
Une variable aléatoire U prend ses valeurs de manière équiprobable dans $[|1;10|]$. On note M_n la variable aléatoire moyenne associée à un échantillon de taille n de la loi de probabilité de U.

1. Déterminer la plus petite valeur de n telle que l'inégalité de concentration assure que $\mathbb{P}(|M_n - 5,5| \geq 0,5) \leq 0,05$. On note k cette valeur.

2. Recopier et compléter les fonctions en Python suivantes afin d'estimer la probabilité $\mathbb{P}(|M_n - 5,5| \geq 0,5)$.

```python
import random as rd
def simu_U():
    return rd.randint(...)
def simu_M(n):
    s=sum([... for i in range(n)])
    return ...
def p(n):
    cpt=0
    for i in range (5000):
        if ...:
            cpt+=1
    return
```

3. En déduire une estimation de la probabilité $\mathbb{P}(|M_k - 5,5| \geq 0,5)$. Comparer cette estimation avec la majoration obtenue avec l'inégalité de concentration.

Exercice 20:
Une variable x évolue k fois, à chaque étape, x augmente de 1 avec la probabilité p ou bien diminue de 1. On appelle marche aléatoire cette expérience aléatoire.

1. La fonction en Python `ma` suivant est une simulation d'une telle marche aléatoire, quelle est la valeur de p ?

```python
import random as rd
def ma(k):
    x=0
    for pas in range(k):
        if rd.randint(1,3)==1:
            x+=1
        else :
            x-=1
    return x
```

2. Modifier le fonction `ma` afin que, lors d'une étape, la probabilité que la valeur de x augmente soit la même que celle que sa valeur diminue.

3. On note X la variable aléatoire égale à la valeur de x après 20 évolutions.
   (a) Justifier que pour tout entier $l \in [|0;20|]$, $\mathbb{P}(X = -l) = \mathbb{P}(x = l)$.
   (b) En déduire l'espérance de X.
   (c) On indique que $\mathbb{E}(|X|) \leq 3,53$. Majorer $\mathbb{P}(|X| \geq 5)$.
   (d) Estimer $\mathbb{P}(|X| \geq 5)$ par simualtion et comparer avec la majoration précédente. Interpréter cette probabilité dans le contexte.

1.4 Approfondissements

Exercice 21:
Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d sur Ω. On note m leur espérance et σ^2 leur variance. On pose $S_n = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$. Démontrer que $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|S_n - m| \geq \varepsilon) \longrightarrow 0$.

Exercice 22:
Soit (X_n) une suite de variable aléatoire deux à deux indépendantes. On suppose que pour tout $n, X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$. On note $S_n = X_1 + ... + X_n$. On souhaite démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

1. Pourquoi ne peut-on par appliquer directement la loi faible des grands nombres ?

2. Quelle est l'espérance de S_n ? Sa variance ? Démontrer que $\mathbb{V}(S_n) \leq n$.

3. En déduire le résultat.