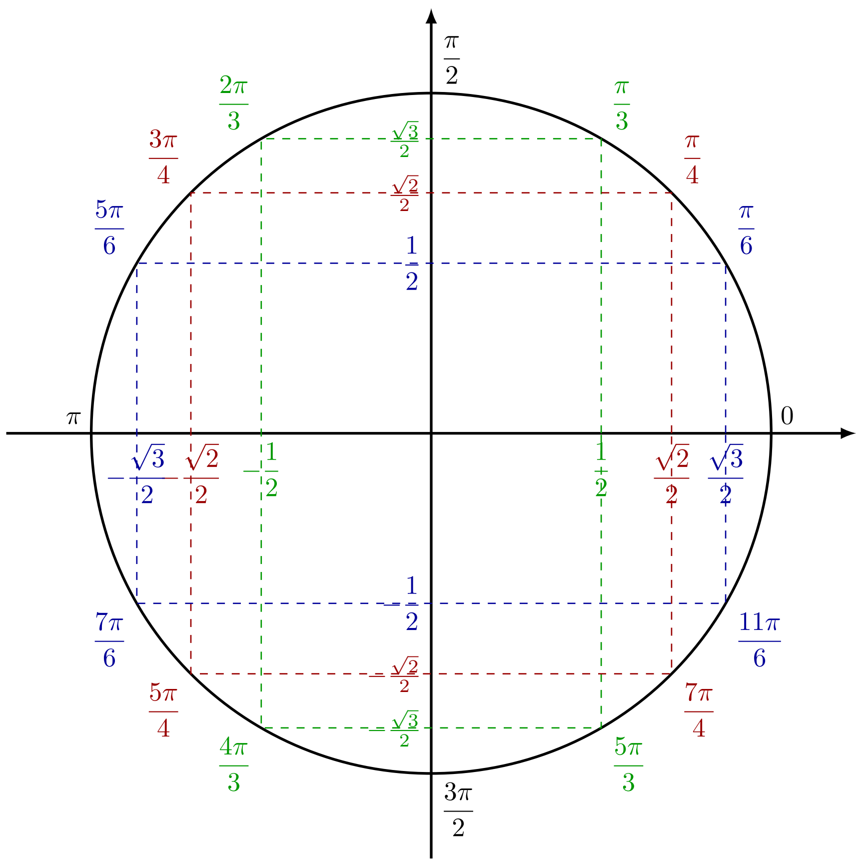
1 Fonctions trigonométriques

1.1 Compétences Attendues

- Résoudre une équation du type $\cos(x) = a$, une inéquation de la forme $\cos(x) \leq a$ sur $[-\pi, \pi]$.
- Dans le cadre de la résolution de problème, notamment géométrique, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques, pour déterminer des variations, un optimum.

1.2 Exercices

On donne le cercle trigonométrique avec les valeurs remarquables de cosinus et sinus ci-dessous :



Exercice 1:
En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes:

1. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
2. $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
3. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
4. $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
5. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
6. $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

Exercice 2:
En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes:

1. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
2. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
3. $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$
4. $\sin\left(-\frac{-5\pi}{6}\right)$
5. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
6. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 3:
Soit $x \in \mathbb{R}$, que vaut $(\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2$?

Exercice 4:
Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$.

1. $\sin(3\pi + x)$
2. $\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$
3. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 5:
Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$.

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
2. $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
3. $3\sin(\pi + x) - 2\sin(\pi - x) + 4\sin(x - \pi)$.

Exercice 6:

1. Etant donné que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 7:
Résoudre les équations d'inconnue $x \in]-\pi;\pi]$.

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$
2. $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos(x) = 0$
4. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 8:
Résoudre l'équation $\cos^2(x) - \frac{1}{2} = 0$ sur $[0;2\pi]$.

Exercice 9:
Résoudre les inéquations suivantes sur $[-\pi;\pi]$.

1. $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$
2. $\cos(x) \geq 0$
3. $\cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\cos(2x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 10:
Résoudre les inéquations suivantes sur $[-\pi;\pi]$.

1. $2\cos(x) + 1 > 2$
2. $-\frac{1}{2} \leq \cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $1 - \sqrt{3} \leq -2\cos(2x) + 1 \leq 0$

Exercice 11:
Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
2. $\sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
3. $\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
4. $\cos(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 12:
Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

1. $2\cos(2x) = 1$
2. $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos(2x) = \cos(x)$
4. $\sin(3x) = \cos(x)$

Exercice 13:
A l'aide d'un cercle trigonométrique, donner l'ensemble des solutions des inéquations dans l'intervalle $]-\pi:\pi]$:

1. $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos(x) \geq -\frac{1}{2}$
3. $\cos(x) < 0$

Exercice 14:
Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
2. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x)$

Exercice 15:
Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ les inéquations suivantes :

1. $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 \geq 0$
2. $2\sin^2(x) + 5\sin(x) + 2 < 0$

Exercice 16:
Vérifier que la fonction f est T-périodique.

1. $f(x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$, $T = \frac{\pi}{2}$
2. $f(x) = \sin\left(\frac{10x-1}{3}\right)$, $T = \frac{3\pi}{5}$

Exercice 17:
Vérifier que la fonction f est T-périodique.

1. $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $T = \pi$
2. $f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, $T = \pi$

Exercice 18:
Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(kx)$ définie sur $\mathbb{R}$ est $\frac{2\pi}{k}$-périodique.

Exercice 19:
On considère la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{2 + \cos(x)}$$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $f(-\pi)$.
3. Trouver deux réels m et M tels que pour tout $x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M$.

Exercice 20:
On admet que les fonctions suivante sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de leur dérivée.

1. $f_1 : x \mapsto \cos(3x) + x$
2. $f_2 : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$
3. $f_3 : x \mapsto \cos(e^x)$

Exercice 21:
On admet que les fonctions suivante sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de leur dérivée.

1. $f_4 : x \mapsto \sin^3(x)$
2. $f_5 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$
3. $f_6 : x \mapsto \ln(1+\cos^2(x))$

Exercice 22:
Le but de cet exercice est de prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
On pose $f : x \mapsto \cos^2(x) + \sin^2(x)$.

1. Que vaut $f(0)$?
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x.
3. Conclure.

Exercice 23:
Soit $f : x \mapsto x + \cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Construire le tableau de variations de f en incluant les éventuelles limites en $\pm\infty$.
2. Donner l'équation de la tangante à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Exercice 24:
On considère la fonction $f : x \mapsto \sin(x) - \dfrac{x}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Etudier les variations de f sur $[-\pi;\pi]$ puis tracer sa courbe dans un repère orthonormé.

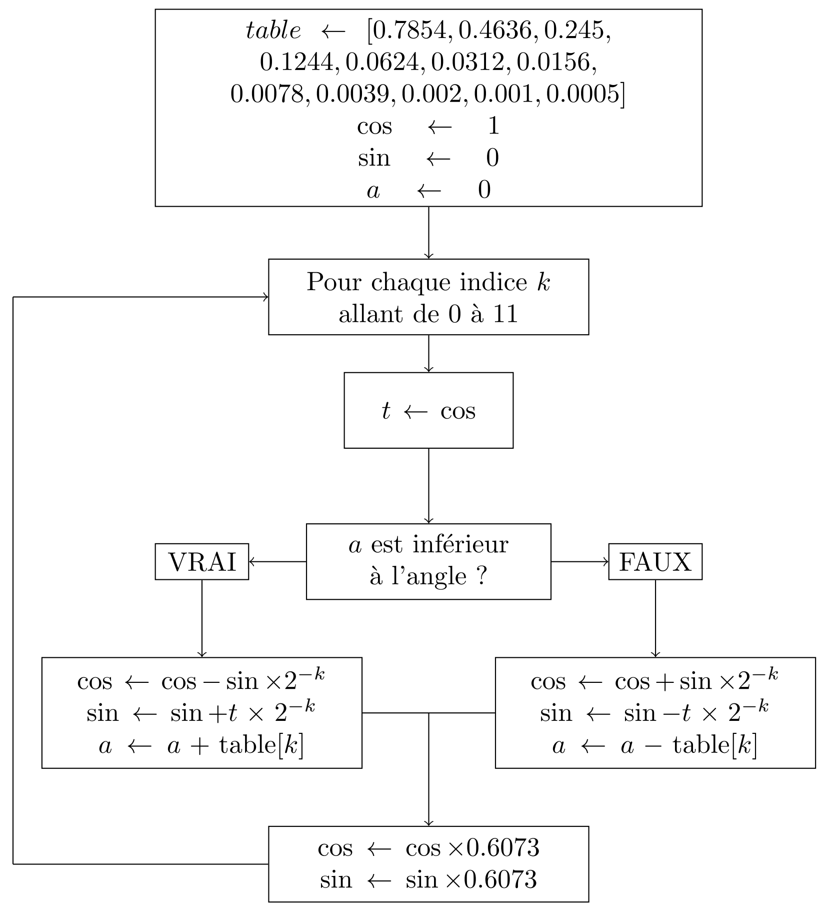
Exercice 25:

1. Démontrer que les fonctions $f : t \mapsto \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ et $g : t \mapsto \cos^2(t)$ sont des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 4y = 2$.
2. Justifier qu'elles vérifient la même double condition initiale, c'est-à-dire que $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$.
3. De la même manière qu'il existe une unique solution à une équation différentielle d'ordre 1 avec une condition initiale, on admet qu'une équation différentielle d'ordre 2 avec une double condition initiale admet une unique solution. En déduire que les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}$.

1.3 Algorithmes et Python

Exercice 26:
En 1971, John Stephen Walther a publié une généralisation de l'algorithle CORDIC, élovaré par Jack E. Volder en 1959.
Cela a permis d'implémenter certains calculs dans la calculatrice HP-35, comme ceux des fonctions trigonométriques mais également d'autres fonctions comme l'exponentielle.

L'algortihme proposé par J.S. Walther se fonde sur la connaissance d'une table élémentaire à partir de laquelle on applique l'algorithme ci-dessous qui calcule une valeur approchée à 10^{-3} du cosinus et du sinus (respectivement affectés aux variables cos et sin) d'un angle, en radians, compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

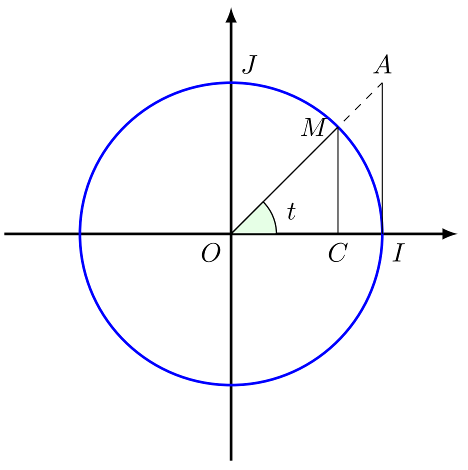


1. (a) Coder en Python une fonction `trigo` renvoyant dans une liste les valeurs approchées du cosinus et du sinus d'un angle, an radiant, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
   (b) Tester cette fonction sur des angles dont les valeurs de cosinus et sinus sont connues.
2. En utilisant les propriétés des fonctions cosinus et sinus, écrire une fonction cos (respectivement sin) renvoyant le cosinus (respectivement le sinus) d'un angle $x \in \mathbb{R}$ passé en paramètre.
   On pourra d'abord coder une fonction `mesure_principale` qui, pour un angle donné, renvoie sa mesure principale comprise dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, puis procéder par disjonction de cas selon le quadrant du cercle trigonométrique dans lequel se trouve cette mesure principale.

1.4 Approfondissements

Exercice 27:
On définit la fonction tangente par tan : $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$.

1. (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction tangente.
   (b) Justifier que, pour un angle t, en radians, en notant M le point du cercle trigonométrique associé à cet angle, la tangente correspond, lorsqu'elle existe, à la distance entre $I(1;0)$ et le point A, intersection de $[OM)$ et de la tangente au cercle en I.



2. (a) Démontrer que pour tout t dans l'ensemble de définition de tan :
$$\tan(t+\pi) = \tan(t)$$
   (b) En déduire que l'étude de la fonction tangente peut être ramenée à l'étude de ladite fonction sur $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
3. (a) Démontrer que la fonction tangente est impaire sur I.
   (b) En déduire que l'étude la fonction tangente peut être ramenée à l'étude de ladite fonction sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.
4. (a) Justifier que la fonction tan est dérivable sur I et démontrer que pour tout $t \in I$:
$$\tan'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$$
   (b) Calculer les limites de la fonction tan aux bornes de I.
   (c) En déduire le tableau de variations de tan sur I.
5. Justifier que tout nombre réel admet un antécédent par la fonction tangente. Cela semble-t-il cohérent avec la caractérisation géométrique de tan de la question 1.(b) ?

Exercice 28:
Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant :
$$\begin{cases} 2\cos(x) - \sin(x) &= \sqrt{3} + \dfrac{1}{2} \\ \cos(x) + 2\sin(x) &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{cases}$$

Exercice 29:
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 \geq 0$
2. $\cos(5x) + \cos(3x) \geq \cos(x)$

Exercice 30:
Soit $f : x \mapsto \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right)$.
Quel est le domaine de définition de f ? La fonction f est-elle paire ? impaire ? périodique ?

Exercice 31:
Déterminer la valeur de $\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\arctan(\sqrt{3})$.

Exercice 32:
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\tan(\arcsin(x))$
2. $\sin(\arccos(x))$
3. $\cos(\arctan(x))$

Exercice 33:
Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n\arccos(x))$ et $g_n(x) = \dfrac{\sin(n\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$.
Prouver que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.