Sujet 1

Cours :
Enoncer et démontrer le lemme des noyaux.

Exercice 1 :
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \ker(f + \mathrm{Id}) \bigoplus \ker(f - 2\mathrm{Id})$:
   (a) en utilisant le lemme des noyaux ;
   (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \ker(f - 2\mathrm{Id})$.

Exercice 2 :
Résoudre $M^n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 :
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in GL(E)$.
Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable.
Dans le cas où f n'est pas inversible :
Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable et $\ker(f) = \ker(f^2)$.

Exercice 4 :
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Sujet 2

Cours :
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u. Montrer que si u est trigonalisable alors u_F l'est aussi.

Exercice 1 :
Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$.
On pose : $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières : sans utiliser la matrice de f puis en l'utilisant.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
3. f est-il diagonalisable ?

Exercice 2 :
La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 :
On considère l'équation $Z^2 = M$ d'inconnue $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fixée.

1. Calculer le nombre de solutions lorsque toutes les valeurs propres de M sont simples.
2. Donner un exemple de matrice M où il y a une infinité de solutions.
3. Si M est la matrice avec des 1 sur la première diagonale supérieure et des 0 partout ailleurs, montrer que l'équation n'admet aucune solution.

Exercice 4 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.
On considère $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}$.

1. Montrer que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}MP$ et $P^{-1}AP$ sont diagonales.
2. Montrer que $\mathcal{C}(A) = \mathbb{K}[A]$.

Sujet 3

Cours :
Enoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante de trigonalisation.

Exercice 1 :
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Exercice 2 :
Déterminer les éléments propres de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & \alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$.

On note $P = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_i X^i$.

1. Montrer que $\chi_A = P$.
2. Montrer que $\pi_A = P$.
3. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples.

Exercice 5 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E qui commutent deux à deux.
Montrer que si les f_i sont trigonalisables, alors on peut les trigonaliser dans une même base.

Exercice 5 :
Soit P un polygone dont les sommets dans le plan complexes ont pour affixes $z_1, \dots, z_n$.
On définit par récurrence $(P_k)_k$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k.
Montrer que la suite $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de P.

Exercice 4 :
Dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on considère l'application s qui a toute matrice associe la matrice symétrisée par rapport à la seconde diagonale.

1. Montrer que s est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Si $A = s(A)$, A est-elle nécessairement diagonalisable ?
3. Montrer que $\chi_{s(A)} = \chi_A$.
4. L'endomorphisme s est-il diagonalisable ?

Exercice 5 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u_1, \dots, u_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux.
Que vaut $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n$?