Chapitre 8 : Probabilités conditionnelles

Axel Carpentier

Première technologique :

Tronc commun

Table des matières

Rappels

Définition:

- On appelle expérience aléatoire une expérience dont le résultat est dû au hasard.
- Une issue x_i est un résultat possible de l'expérience aléatoire.
- On note $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; ...\}$ l'ensemble des issues possibles, appelé l'univers.
- Un évènement est un sous ensemble de Ω composé d'une ou plusieurs issues (entre accolade). S'il n'y a qu'une issue, on dit qu'il est élémentaire.

Rappels

Exemple:

- On lance un dé numéroté de 1 à 6. On a $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
  L'évènement "obtenir un 5" est élémentaire mais l'évènement "obtenir un nombre pair" ne l'est pas.
- On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. On a

$$\Omega = \{7 \text{ coeur}, 7 \text{ carreau}, ..., As \text{ pique}, As \text{ trefle}\}$$

. Soit les événements :

- A: "tirer le 7 de coeur"
- B: "Tirer un pique"

On a $A = \{7 \text{ coeur}\}$ qui est élémentaire et $B = \{7 \text{ pique}, 8 \text{ pique}, ..., As \text{ pique}\}$ ne l'est pas.

Définition:

Soient A et B deux évènements.

- L'évènement "A et B" , noté A$\cap$B, est constitué des issues réalisant à la fois A et B.
- L'évènement "A ou B" , noté A$\cup$B, est constitué des issues réalisant A ou B.
- Les évènements A et B sont dits contraires si l'un se réalise lorsque l'autre ne se réalise pas. B est alors l'évènement contraire de A, noté $\bar{A}$.
- Deux évènements sont dits disjoints s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$

Rappels

Exemple:
On s'intéresse à l'expérience aléatoire d'un tirage de carte.
On considère les évènements suivants $A =$ "Tirer un 8" ; $B =$ "Tirer un pique" ; $C =$ "Tirer le 7 de pique"
On a les évènements suivants:

- $A \cap B =$ "tirer le 8 de pique" et $A \cup B =$ "tirer un 8 ou un pique".
- $A \cap C = \emptyset$ et $A \cup C =$ "tirer un 8 ou le 7 de pique".
- $B \cap C = C$ et $B \cup C = B$.

Définition:

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On considère un évènement B dans Ω de probabilité non nulle $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
Pour tout évènement A, on appelle probabilité de A sachant B, noté $\mathbb{P}_B(A)$ (ou $\mathbb{P}(A|B)$) la quantité :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\text{Nombre de cas pour A} \cap B}{\text{Nombre de cas pour A}}$$

Probabilité conditionnelle

D'après la définition précédente, on a que pour deux événements A et B :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

On en déduit donc la propriété suivante :

Propriété:

Dans certain cas on peut être amené à connaître la probabilité conditionnelle.
On a alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$$

ATTENTION

Les quantités $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$ n'ont aucunes raisons d'être égales

Exercice bilan

On interroge des personnes dans la rue, la réponse est ou bien "oui" ou bien "non". On note les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous.

	Oui	**Non**	**Total**
Homme	57	84	141
Femme	25	16	41
Total	82	100	182

On définit les événements :

- O : "La personne interrogée a dit oui"
- F : "La personne interrogée est une femme".

1. Expliciter par une phrase l'événement $\bar{O}$ puis calculer sa probabilité.
2. Expliciter par une phrase l'événement $\bar{O} \cap F$ puis calculer sa probabilité.
3. En déduire la probabilité de F sachant $\bar{O}$.
4. Expliciter par une phrase l'événement $\bar{F} \cup O$ puis calculer sa probabilité.
5. Calculer $\mathbb{P}_{\bar{F}}(O)$.