

Chapitre 5 : Composition de fonctions

Axel Carpentier

Terminale technologique :

Sciences et technologies de l'industrie et du développement durable (STI2D)

Table des matières

1. Définition
2. Dérivation de fonctions composées
 - 2.1 Cas particuliers
 - 2.2 Cas général
3. Primitivation de fonctions composées
4. Exercice bilan

Définition

1. Définition

2. Dérivation de fonctions composées

- 2.1 Cas particuliers
- 2.2 Cas général

3. Primitivation de fonctions composées

4. Exercice bilan

Définition

Définition:

On appelle fonction composée de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie par :

$$(v \circ u)(x) = v(u(x))$$

Exemple:

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x - 3}$. C'est la composée de deux fonctions u et v :

$$f : x \xrightarrow{u} x - 3 \xrightarrow{v} \sqrt{x - 3}$$

On a $u(x) = x - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$ et donc f :

$$f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(x - 3) = \sqrt{x - 3}$$

Définition

Exercice:

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Identifier la composition de deux fonctions dans la fonction f .

Exercice:

Soient $u : x \mapsto x^2 + x$ et $v : x \mapsto \frac{x}{x+1}$. Déterminer l'expression des fonctions $f = v \circ u$ et $g = u \circ v$.

Dérivation de fonctions composées

1. Définition

2. Dérivation de fonctions composées

2.1 Cas particuliers

2.2 Cas général

3. Primitivation de fonctions composées

4. Exercice bilan

Cas particuliers

On a ci-dessous un récapitulatif de dérivation des fonctions usuelles :

| | Fonction f | Dérivée f' |
|----------------------|----------------------|--------------------------|
| Puissance | $f(x) = x^n$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ |
| Inverse | $f(x) = \frac{1}{x}$ | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ |
| Cosinus | $f(x) = \cos(x)$ | $f'(x) = -\sin(x)$ |
| Sinus | $f(x) = \sin(x)$ | $f'(x) = \cos(x)$ |
| Exponentielle | $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |
| Logarithme | $f(x) = \ln(x)$ | $f'(x) = \frac{1}{x}$ |

Cas particuliers

On a ci-dessous un récapitulatif d'opérations de dérivation :

| Fonction | Dérivée |
|---------------------------|-------------------------|
| $ku, k \in \mathbb{R}$ | ku' |
| $u + v$ | $u' + v'$ |
| uv | $u'v + uv'$ |
| $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| $u^n, n \in \mathbb{N}^*$ | $nu'u^{n-1}$ |
| $\cos(u)$ | $-u'\sin(u)$ |
| $\sin(u)$ | $u'\cos(u)$ |
| e^u | $u'e^u$ |
| $\ln(u)$ | $\frac{u'}{u}$ |

Cas particuliers

Exercice:

Soit $f : x \mapsto 1 - \frac{4x - 3}{x^2 + 1}$ définie sur \mathbb{R} . Etablir le tableau de variations de f .

Dérivation de fonctions composées

1. Définition

2. Dérivation de fonctions composées

2.1 Cas particuliers

2.2 Cas général

3. Primitivation de fonctions composées

4. Exercice bilan

Cas général

Propriété:

On a :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x)$$

Exercice:

Déterminer la fonction dérivée de $g(x) = \left(\frac{3x+2}{x-3}\right)^3$.

Primitivation de fonctions composées

1. Définition

2. Dérivation de fonctions composées

- 2.1 Cas particuliers
- 2.2 Cas général

3. Primitivation de fonctions composées

4. Exercice bilan

Primitivation de fonctions composées

On a ci-dessous un récapitulatif des primitives des fonctions usuelles :

| | Fonction f | Primitive F |
|------------------|----------------------------------|---|
| Constante | $f(x) = a$ | $F(x) = ax + k$ |
| Puissance | $f(x) = x^n$ | $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ |
| Cosinus | $f(x) = \cos(x)$ | $F(x) = \sin(x) + k$ |
| Sinus | $f(x) = \sin(x)$ | $F(x) = -\cos(x) + k$ |
| Sinusoïde | $f(x) = A \cos(\omega x + \phi)$ | $F(x) = \frac{A}{\omega} \sin(\omega x + \phi) + k$ |

Primitivation de fonctions composées

On a ci-dessous un récapitulatif d'opérations de dérivation :

| Fonction | Primitive |
|----------------|--|
| $f(ax + b)$ | $\frac{1}{a}F(ax + b)$ où F est une primitive de f . |
| $u'u^n$ | $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ |
| $u'e^u$ | e^u |
| $\frac{u'}{u}$ | $\ln(u)$ |
| $u'\cos(u)$ | $\sin(u)$ |
| $u'\sin(u)$ | $-\cos(u)$ |

Primitivation de fonctions composées

Exercice :

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$
- $g : x \mapsto xe^{x^2}$
- $h : x \mapsto \cos(2x) - 3 \sin(3x - 1)$

Exercice bilan

1. Définition

2. Dérivation de fonctions composées

2.1 Cas particuliers

2.2 Cas général

3. Primitivation de fonctions composées

4. Exercice bilan

Exercice bilan

Soit $f : x \mapsto (2x - 6)(x^2 - 6x + 7)^{17}$ une fonction définie sur \mathbb{R} .

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

2. Calculer $\int_{-2}^3 f(x)dx$.