Exercice 1: Automatismes *(. . . / 3 points)*

1. Etablir le tableau de signe de $f(x) = (-2x + 14)(-4x + 12)$.

2. Pour le petit déjeuner, Yassine a acheté 1 brioche et 6 croissants.
Le prix d'un croissant est 1,4 et il a payé au total 10,5 .
On désigne par x le prix d'une brioche. Déterminer la valeur de x.

3. Le prix d'un article connait deux baisses successives de 30 %. Déterminer le taux d'évolution global associé.

Solution :

1.
- $\boxed{\text{Etape 1 :}}$ On cherche les racines.

  On a
$$(-2x + 14)(-4x + 12) = 0 \implies x = 7 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

- $\boxed{\text{Etape 2 :}}$ On établit le tableau de signe.

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$-2x+14$		$+$		$+$	0	$-$	
$-4x+12$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. On résout l'équation $x + 6 \times 1,4 = 10,5$. On a $x = 2,1$.

3. On a $c_{global} = 0,7^2 = 0,49$ D'où une baisse de 51%.

Exercice 2: Tronc commun *(. . . / 5 points)*
Une urne contient 13 boules dont sept rouges. On tire neuf boules l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. Cela constitue un prélèvement. On suppose l'équiprobabilité des tirages.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement ainsi défini, associe le nombre de boules rouges obtenues.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement trois boules rouges.

3. Calculer la probabilité d'obtenir au plus cinq boules rouges.

4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge.

5. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

Solution :

1. X suit une loi binomiale car l'expérience aléatoire consiste en une répétition d'épreuves identiques et indépendantes n'ayant que deux issues possibles : une boule qui est rouge ou qui ne l'est pas. On a donc $X \sim \mathcal{B}\left(9; \frac{7}{13}\right)$.
2. On a $\mathbb{P}(X = 3) = 0,125$.
3. On a $\mathbb{P}(X \leq 5) = 0,66$.
4. On a $\mathbb{P}(X \geq 1) = 0,99$.
5. On a $\mathbb{E}(X) = 9 \times \frac{7}{13} = 4,85$. En moyenne, sur 9 tirages, on tire 4,87 boules rouges.

Exercice 3: Spécialité Maths-Physique *(. . . / 5 points)*

1. Exprimer, en fonction de $\ln(3)$ et $\ln(5)$, le nombre : $\ln\left(\frac{5^4}{3^3}\right)$.
2. Soit $x > 0$, exprimer, en fonction de $\ln(x)$, le nombre : $4\ln\left(\frac{1}{x^3}\right) - 5\ln(x^2) + 5\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Résoudre l'équation $\ln(4x-8) = 6$.
4. Résoudre l'équation $15e^{-0,45x} + 25 = 35$.
5. Soit $f(x) = \frac{x^3}{\ln(x)}$. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

Solution :

1. On a $\ln\left(\frac{5^4}{3^3}\right) = \ln(5^4) - \ln(3^3) = 4\ln(5) - 3\ln(3)$.
2. On a $4\ln\left(\frac{1}{x^3}\right) - 5\ln(x^2) + 5\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -4\ln(x^3) - 10\ln(x) - 5\ln(x) = -12\ln(x) - 15\ln(x) = -27\ln(x)$.
3. On a $\ln(4x-8) = 6 \implies 4x - 8 = e^6 \implies x = \frac{e^6+8}{4}$.
4. On a $15e^{-0,45x} + 25 = 35 \implies e^{-0,45x} = \frac{10}{15} \implies x = -\frac{\ln(\frac{10}{15})}{0,45}$.
5. On a $f'(x) = \frac{3x^2\ln(x) - x^3 \times \frac{1}{x}}{\ln(x)^2} = \frac{3x^2\ln(x) - x^2}{\ln(x)^2}$.

Exercice 1: Automatismes *(. . . / 3 points)*

1. Etablir le tableau de signe de $f(x) = (2x - 6)(6x + 18)$.

2. Pour le petit déjeuner, Rémi a acheté 8 brioches et 8 croissants.
   Le prix d'un croissant est 1,3 et il a payé au total 28,8 .
   On désigne par x le prix d'une brioche. Déterminer la valeur de x.

3. Le prix d'un article connait deux augmentations successives de 20 %. Déterminer le taux d'évolution global associé.

Solution :

1. - $\boxed{\text{Etape 1 :}}$ On cherche les racines.

     On a
     $$(2x - 6)(6x + 18) = 0 \implies x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

   - $\boxed{\text{Etape 2 :}}$ On établit le tableau de signe.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$2x - 6$		$-$		$-$	0	$+$	
$6x + 18$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. On résout l'équation $8x + 8 \times 1,3 = 28,8$. On a $x = 2,3$.

3. On a $c_{global} = 1,2^2 = 1,44$ D'où une augmentation de 44%.

Exercice 2: Tronc commun *(. . . / 5 points)*
Une urne contient 15 boules dont six rouges. On tire sept boules l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. Cela constitue un prélèvement. On suppose l'équiprobabilité des tirages.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement ainsi défini, associe le nombre de boules rouges obtenues.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement trois boules rouges.

3. Calculer la probabilité d'obtenir au plus cinq boules rouges.

4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge.
5. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

Solution :

1. X suit une loi binomiale car l'expérience aléatoire consiste en une répétition d'épreuves identiques et indépendantes n'ayant que deux issues possibles : une boule qui est rouge ou qui ne l'est pas. On a donc $X \sim \mathcal{B}\left(7; \dfrac{6}{15}\right)$.
2. On a $\mathbb{P}(X = 3) = 0,29$.
3. On a $\mathbb{P}(X \leq 5) = 0,98$.
4. On a $\mathbb{P}(X \geq 1) = 0,97$.
5. On a $\mathbb{E}(X) = 7 \times 0,4 = 2,8$. En moyenne, sur 9 tirages, on tire 2,8 boules rouges.

Exercice 3: Spécialité Maths-Physique *(. . . / 5 points)*

1. Exprimer, en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$, le nombre : $\ln\left(\dfrac{2^5}{5^4}\right)$.
2. Soit $x > 0$, exprimer, en fonction de $\ln(x)$, le nombre : $-2\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - 3\ln(x^2) + 3\ln(x^3)$.
3. Résoudre l'équation $\ln(-5x - 9) = -8$.
4. Résoudre l'équation $30e^{0,8x} + 10 = 15$.
5. Soit $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

Solution :

1. On a $\ln\left(\dfrac{2^5}{5^4}\right) = \ln(2^5) - \ln(5^4) = 5\ln(2) - 4\ln(5)$.
2. On a $-2\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - 3\ln(x^2) + 3\ln(x^3) = 2\ln(x^2) - 6\ln(x) + 9\ln(x) = 4\ln(x) + 3\ln(x) = 7\ln(x)$.
3. On a $\ln(-5x - 9) = -8 \implies -5x - 9 = e^{-8} \implies x = \dfrac{e^{-8} + 9}{-5}$.
4. On a $30e^{0,8x} + 10 = 15 \implies e^{0,8x} = \dfrac{5}{30} \implies x = \dfrac{\ln(\frac{5}{30})}{0,8}$.
5. On a $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$.