<u>Exercice 1 :</u> Tronc commun *(... / 10 points)*

On dispose d'un sac et de deux urnes A et B.

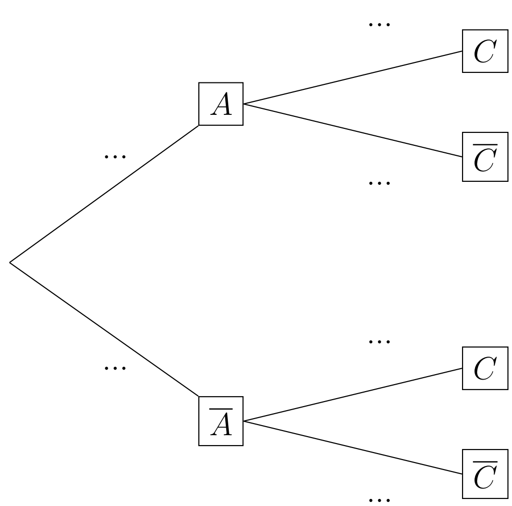
- Le sac contient 4 boules : 1 boule avec la lettre A et 3 boules avec la lettre B.
- L'urne A contient 5 billets : 3 billets de 50 euros et 2 billets de 10 euros.
- L'urne B contient 4 billets : 1 billet de 50 euros et 3 billets de 10 euros.

Un joueur prend au hasard une boule dans le sac :

- si c'est une boule avec la lettre A, il prend au hasard un billet dans l'urne A.
- si c'est une boule avec la lettre B, il prend au hasard un billet dans l'urne B.

On note les évènements suivants :

- A : le joueur obtient une boule avec la lettre A.
- C : le joueur obtient un billet de 50 euros.



1. Compléter l'arbre ci-contre représentant la situation.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement "*le joueur obtient une boule avec la lettre* A *et un billet de* 50 *euros* "?
3. Démontrer que $\mathbb{P}(C) = 0,3375$.
4. Le joueur a obtenu un billet de 10 euros.
   L'affirmation "*Il y a plus de* 80 % *de chances qu'il ait au préalable obtenu une boule avec la lettre* B" est-elle vraie ? Justifier.
5. On note X_1 la variable aléatoire qui donne la somme, en euros, obtenue par le joueur.

   Exemple : si le joueur obtient un billet de 50 euros, on a $X_1 = 50$.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_1 ?
   (b) Etablir la loi de probabilité de X_1.
   (c) Montrer que l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ est égale à $23,50$.

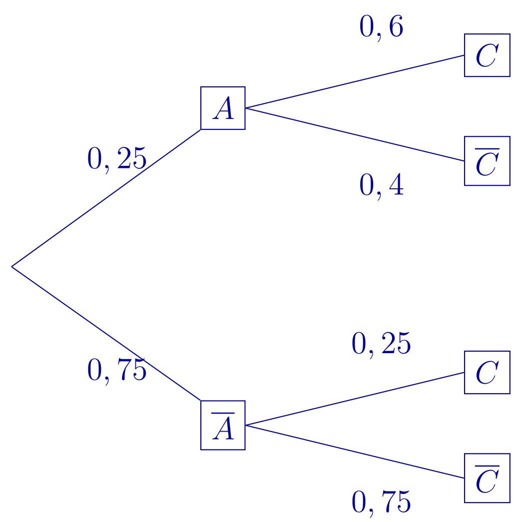
6. Après avoir remis la boule dans le sac et le billet dans l'urne où il a été pris, le joueur joue une deuxième partie. On note X_2 la variable aléatoire qui donne la somme obtenue par le joueur lors de cette deuxième partie.

   On note Y la variable aléatoire qui donne la somme totale obtenue par le joueur après ces deux parties.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y ?
   (b) Etablir la loi de prabibilité de Y.
   (c) Montrer que $\mathbb{E}(Y) = 47$.

Solution :

1. On complète l'arbre représentant la situation.



2. L'évènement "Le joueur obtient une boule avec la lettre A et un billet de 50 euros" est $A \cap C$.

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(C) = 0,25 \times 0,6 = \boxed{0,15}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(C) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(C) \\ &= 0,15 + 0,75 \times 0,25 = 0,15 + 0,1875 \\ &= \boxed{0,3375} \end{aligned}$$

4. On doit calculer la probabilité $\mathbb{P}_{\overline{C}}\left(\overline{A}\right)$:

$$\mathbb{P}_{\overline{C}}\left(\overline{A}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{C}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{C}\right)} = \frac{0,75 \times 0,75}{1 - 0,3375} = \frac{0,5625}{0,6625} = \frac{45}{53} \approx 0,85.$$

La probabilité que le joueur ait pris une boule avec la lettre B sachant qu'il a obtenu un billet de 10 euros est environ 85 %. L'affirmation est donc vraie.

5. (a) L'ensemble des valeurs prises par X_1 est $E = \{10; 50\}$.

   (b) La loi de probabilité de X_1 est donnée par le tableau suivant :

k_i	10	50
$P(X_1 = k_i)$	0, 6625	0, 3375

(c) L'espérance de X_1 est donc :

$$E(X_1) = 10 \times 0,6625 + 50 \times 0,3375 = 6,625 + 16,875 = \boxed{23,5}.$$

6. (a) L'ensemble des valeurs prises par Y est $E = \{20; 60; 100\}$.
   (b) La loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

k_i	20	60	100
$P(X_1 = k_i)$	0,4389	0,4472	0,1139

   (c) L'espérance de Y est donc :

$$E(Y) = 20 \times 0,4389 + 60 \times 0,4472 + 100 \times 0,1139 = \boxed{47}.$$

<u>Exercice 2 :</u> Spécialité Maths-Physique *(... / 10 points)*

Pour fabriquer de l'aluminium en feuille on chauffe une plaque d'aluminium à 250 °C puis on la sort du four : c'est alors la phase de refroidissement.
On étudie l'évolution de la température de la plaque d'aluminium durant cette phase.
On note $f(t)$ la température de la plaque d'aluminium à l'instant t.
$f(t)$ est exprimée en degré Celsius, et t désigne le nombre de minutes de refroidissement.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Équation différentielle

On sait que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' + 0,25y = 7,5$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$, et où y' est la dérivée de y.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
2. Déterminer l'expression de la fonction f sachant qu'à l'instant $t = 0$ la température est égale à 250 °C.

Partie B. Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = 220^{-0,25t} + 30.$$

On admet que $f(t)$ représente la température (en degré Celsius) de la plaque d'aluminium après t minutes de refroidissement.

1. Déterminer la valeur approchée à 0,1 °C de la température de la plaque après un quart d'heure de refroidissement.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   (a) Déterminer $f'(t)$ pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) En déduire le tableau de variation complet de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Interpréter qualitativement ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. L'affirmation "*en cent secondes, la plaque a perdu cent degrés*" est-elle vraie ?
5. Quelle est la durée nécessaire, arrondie à la seconde, pour que la température de la plaque passe en dessous de 150 °C ?
6. Réaliser sur la copie un croquis donnant l'allure de la courbe représentative de la fonction f. Ce croquis devra également faire apparaître les résultats des questions 1 à 4.

Solution :

Partie A. Équation différentielle

1. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = Ce^{-0,25t} + 30$.
2. On a : $f(0) = 250 \iff ke^0 + 30 = 250 \iff k = 220$
   La fonction f a donc pour expression $f(t) = 220e^{-0,25t} + 30$ où $t \in [0\,;+\infty[$.

Partie B. Étude de fonction

1. La valeur de la température de la plaque après un quart d'heure de refroidissement, est $f(15)$ dont la valeur approchée à 0,1 °C est $35,2$ °C.
2. On a $\lim\limits_{t\to+\infty} -0,25t = -\infty$ et $\lim\limits_{T\to-\infty} e^T = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,25t} = 0$.
   On en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} 220e^{-0,25t} + 30 = 30$, c'est-à-dire $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 30$.
   La température limite de refroidissement sera donc de 30 °C.
3. (a) On a $f'(t) = 220 \times (-0,25)e^{-0,25t} + 0 = -55e^{-0,25t}$.
   (b) On a le tableau de variation de f suivant :

t	0	$+\infty$
$f(t)$	250 ↘	30

   (c) La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$. Cela paraît logique car plus le temps passe pendant la phase de refroidissement, plus la température de la plaque diminue.
4. Cent secondes correspondent à 1 minute et 40 secondes, soit $1 + \dfrac{40}{60} \approx 1,667$.
   Or $f(1,667) \approx 175 > 150$ donc l'affirmation est fausse.

5. On résout l'inéquation $f(t) < 150$.

$$\begin{aligned} f(t) < 150 &\iff 220e^{-0{,}25t} + 30 < 150 \\ &\iff 220e^{-0{,}25t} < 120 \\ &\iff e^{-0{,}25t} < \frac{120}{220} \\ &\iff -0,25t < \ln\left(\frac{120}{220}\right) \\ &\iff t > -\frac{\ln\left(\frac{120}{220}\right)}{0,25} \end{aligned} \tag{1}$$

Or $-\dfrac{\ln\left(\frac{120}{220}\right)}{0,25} \approx 2,4245$ et $0,4245$ minute correspond à $0,4245 \times 60$ soit environ 25 secondes.
La durée nécessaire, arrondie à la seconde, pour que la température de la plaque passe en dessous de 150 ℃ est donc de 2 minutes et 25 secondes.

6. On trace la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.