Sujet 1

Exercice 1 :

On pose :

$$\forall x, t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$$

1. Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pose alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice 2 :

Etudier puis exprimer explicitement la fonction :

$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{1-t}{\ln(t)} t^x dt$$

Exercice 3 :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornée.

On définit le produit de convolution par :

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Montrer que le produit de convolution de f et g est continue puis de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

On considère l'intégrale de Poisson définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ par :

$$P(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)dt$$

Sujet 2

Exercice 1 :

1. Enoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction :
$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E).

Exercice 2 :

Pour tout réel x, on considère :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$$

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer que $f + g^2$ est une application constante et déterminer cette constante.
3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}$.

Exercice 3 :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on note $\hat{f}$ la transformée de Fourier définie par :

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx$$

1. Montrer que $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$.
2. Montrer que $g_\varepsilon(k) = |\hat{f}(k)|^2 e^{-\frac{\varepsilon k^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R})$.
3. Montrer que :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(k)dk = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f}(x)f(y)e^{ik(x-y)}e^{-\frac{\varepsilon k^2}{2}}dxdydk$$

Sujet 3

Exercice 1 :

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t}dt$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Prouver que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite finie en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

Exercice 2 :

Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}dt = \frac{\ln(2)}{2}\arctan(x) + \frac{\pi}{8}\ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$$

En déduire la valeur de :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$$

Exercice 3 :

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier définie par :

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy}dx$$

1. Montrer que :
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx$$
2. Montrer que :
$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$$

1. Montrer que, pour tout $x \notin \{0, -1, 1\}$:

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = P(x) - 4\pi \ln |x|$$

2. On se restreint à $x \in]-1, 1[$. Calculer la dérivée de P et montrer qu'elle est nulle sur $]-1, 1[$. En déduire la valeur de $P(x)$.

Exercice 5 :
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on définit :

$$I(f) : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\dfrac{x}{\pi}} \displaystyle\int_0^1 \frac{f(ux)}{\sqrt{1-u}} du \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \forall f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}),\ I \circ I(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

4. On admet que la transformée de Fourier de la gaussienne :
$$h_\varepsilon(x) = e^{-\frac{\varepsilon x^2}{2}}$$
est donnée par :
$$\widehat{h_\varepsilon}(k) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{k^2}{2\varepsilon}}$$
Montrer que :
$$\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(k)dk = \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}} \overline{f}(x) f(y) dx dy$$

5. Soit $\{s_\varepsilon\}$ la famille de fonctions définies par :
$$s_\varepsilon(y) = \int_{\mathbb{R}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}} \overline{f}(x) dx$$
Quelle est la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de s_ε lorsque ε tend vers 0 ?

6. Montrer que :
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(k)dk = \int_{\mathbb{R}} (\lim_{\varepsilon \to 0} s_\varepsilon(y)) f(y) dy$$

7. Montrer que :
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(k)dk = \|\hat{f}\|_{L^2}^2$$

8. En déduire que $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

3. Pour tout $t > 0$, on pose :
$$f_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
   (a) Montrer que, pour tout $t > 0$:
$$\int_{\mathbb{R}} f_t(x)dx = 1$$
   (b) Montrer que, pour tout $\delta > 0$:
$$\lim_{t \to 0} \int_{|x|>\delta} f_t(x)dx = 0$$

4. On suppose que g est continue bornée. Montrer que $f_t * g$ est bien définie et que :
$$\lim_{t \to 0} f_t * g(x) = g(x)$$

Exercice 4 :
Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et g définie pour $x > 0$ par :
$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \cos(x - y) f(y) dy$$
Déterminer la limite de g en 0. En supposant que f a une limite en $+\infty$, déterminer celle de g.