

# 1 Logarithme népérien

## 1.1 Compétences Attendues

- Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien pour transformer des expressions.
- Résoudre des équations et des inéquations d'inconnue  $x$  du type :  $e^{ax} = b$  ;  $e^{ax} > b$  ;  $\ln(x) = b$  ;  $\ln(x) > b$ .
- Étudier des fonctions somme, produit ou quotient de fonctions polynômes et de la fonction  $x \mapsto \ln(x)$ .

## 1.2 Exercices

### Exercice 1:

Résoudre les équations suivantes :

|                  |                       |
|------------------|-----------------------|
| 1. $e^x = 5$     | 3. $\ln(2x - 1) = -2$ |
| 2. $\ln(x) = -5$ | 4. $\ln(1 + x) = 100$ |

### Exercice 2:

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

|                                       |                                          |
|---------------------------------------|------------------------------------------|
| 1. $\ln(x + 1) + \ln(3) = \ln(x + 7)$ | 3. $\ln(x^2 - 3) \leq \ln(x^2) + \ln(2)$ |
| 2. $2\ln(x^2) + 5\ln(x) - 3 = 0$      | 4. $2\ln(x^2) + 5\ln(x) - 3 > 0$         |

### Exercice 3:

Résoudre les équations suivantes en précisant leur domaine de résolution.

|                            |                                          |
|----------------------------|------------------------------------------|
| 1. $\ln(x) = 2$            | 5. $\ln(e^{3x} + 4) \geq 5$              |
| 2. $\ln(3x - 4) = 0$       | 6. $e^{x^2} < 7$                         |
| 3. $e^{3x+2} > 4$          | 7. $(e^{2x+1} - 3)(3x - 7)(e^x + 5) = 0$ |
| 4. $2 + 3\ln(3x - 2) = -1$ | 8. $-14e^{-\frac{1}{90}t} + 21 = 20$     |

### Exercice 4:

Simplifier les écritures suivantes :

|                                  |                                      |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\ln(3) + \ln(4) - \ln(6)$    | 3. $\frac{\ln(9)}{\ln(3)} - \ln(1)$  |
| 2. $4\ln(3) - \ln(9) + 2\ln(27)$ | 4. $\ln(3x^2) - \ln(3)$ avec $x > 0$ |

### Exercice 5:

Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de  $\ln(2)$ .

|             |                    |                                  |                        |
|-------------|--------------------|----------------------------------|------------------------|
| 1. $\ln(8)$ | 2. $\ln(\sqrt{2})$ | 3. $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ | 4. $3\ln(2) - \ln(16)$ |
|-------------|--------------------|----------------------------------|------------------------|

### Exercice 6:

Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de  $\ln(3)$  et  $\ln(7)$ .

|                                   |               |                                    |                     |
|-----------------------------------|---------------|------------------------------------|---------------------|
| 1. $\ln\left(\frac{81}{7}\right)$ | 2. $\ln(441)$ | 3. $\ln\left(\frac{49}{27}\right)$ | 4. $\ln(\sqrt{21})$ |
|-----------------------------------|---------------|------------------------------------|---------------------|

### Exercice 7:

Résoudre l'équation suivante pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\ln(4x^2) + 6\ln(x) - 3 = 0$ .

### Exercice 8:

Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$ .

|                                    |                                          |
|------------------------------------|------------------------------------------|
| 1. $f : x \mapsto 3x + 5 - \ln(x)$ | 3. $h : x \mapsto \frac{1}{x} + 4\ln(x)$ |
| 2. $g : x \mapsto \ln(x) + x^4$    | 4. $k : x \mapsto \ln(x)(x + 1)$         |

### Exercice 9:

Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle  $I$  indiqué.

|                                                               |
|---------------------------------------------------------------|
| 1. $f : x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}, I = ]0; 1[$               |
| 2. $g : x \mapsto \ln(x)(3 - \ln(x)), I = ]0, +\infty[$       |
| 3. $h : x \mapsto (2 - \ln(x))(1 - \ln(x)), I = ]0; +\infty[$ |
| 4. $k : x \mapsto 5\frac{\ln(x)}{x} + 2, I = ]0; +\infty[$    |

### Exercice 10:

On considère la fonction  $f : x \mapsto \ln(x) + x^2$  définie sur  $]0; +\infty[$ .

1. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer  $f'$  et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variation complet de  $f$ .

**Exercice 11:**

1. Lorsqu'un condensateur se charge, la tension à ses bornes est :

$$u(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

où  $R$  est la résistance (en  $\Omega$ ),  $C$  la capacité du condensateur (en F) et  $E$  la force électromotrice du générateur. Exprimer  $t$  en fonction de  $u(t)$ ,  $E$ ,  $R$  et  $C$ .

2. Lorsque le condensateur est chargé, il se décharge dans une résistance. La tension à ses bornes est :

$$u(t) = E e^{-\frac{t}{RC}}$$

Exprimer  $t$  en fonction de  $u(t)$ ,  $E$ ,  $R$  et  $C$ .

**Exercice 12:**

On considère la fonction  $f : x \mapsto -8\,310 \ln(x)$  défini sur  $[0, 2; 1]$ . Tant qu'un organisme est vivant, la quantité de carbone 14 qu'il contient est constante. Après sa mort, cette quantité diminue. La mesure de la quantité de carbone 14 restant permet de dater les organismes qui contiennent du carbone, à condition qu'ils datent de moins de 50 000 ans.

On appelle  $x$  la fraction de carbone 14 restant dans un organisme fossilisé. On admet que  $f(x)$  permet de modéliser l'âge, en années, du fossile.

1. Calculer l'âge d'un fossile qui contient encore 35% de son carbone 14. Arrondir à la centaine d'années.
2. Déterminer la fraction de carbone 14 restant dans un fossile vieux de 15 000 ans.

**Exercice 13:**

En usinage, des systèmes comes-tiges permettent de transformer un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne alternatif.

La levée de course (en cm) qui dépend du temps  $t$  (en ms) peut être modélisée par la fonction  $f : x \mapsto 2 \ln(x) - 0,386$  définie sur  $[2; 6]$ .

1. Calculer la levée, en cm, au bout de 2,5 ms. Donner une valeur approchée au centième.
2. Déterminer le temps (en ms) nécessaire pour que la levée soit de 2,8 cm.

**Exercice 14:**

Pour dater un langage, on utilise la théorie suivante : si un langage possède à l'origine  $N_0$  mots utilisés dans le langage courant, le nombre de mots  $N(t)$  qui restent dans le langage courant après  $t$  millénaire est :  $N(t) = N_0 \times 0,805^t$ .

1. Montrer que  $t = \frac{\ln(N(t)) - \ln(N_0)}{\ln(0,805)}$ .

2. Supposons qu'un langage possède initialement 32 000 mots, combien faut-il d'années pour que 12 000 mots disparaissent.

**Exercice 15:**

La loi de Beer-Lambert affirme que la quantité de lumière  $I$  qui pénètre à une profondeur de  $x$  mètre dans une zone océanique est donnée par :  $I = I_0 \times 0,25^x$  où  $I_0$  est la quantité de lumière à la surface.

1. Exprimer  $x$  en fonction de  $I$  et  $I_0$ .
2. La photosynthèse ne peut pas avoir lieu lorsque moins de 1% de la quantité de lumière à la surface atteint les profondeurs de l'océan. A partir de quelle profondeur la photosynthèse n'a plus lieu ?

**Exercice 16:**

Tout élément radioactif se désintègre au cours du temps. Le nombre d'atomes radioactifs  $N(t)$  où  $t$  désigne le temps (en année) est donnée par  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$  où  $\lambda$  est une constante positive dépendant de l'élément radioactif étudié et  $N_0$  le nombre initial de noyaux radioactifs.

1. On désigne par  $T$  le temps au bout duquel la moitié des atomes radioactifs a disparu.  $T$  s'appelle la demi-vie de l'élément radioactif.
  - (a) Exprimer  $\lambda$  en fonction de  $T$ .
  - (b) La demi-vie du radium est de 1 622 ans. En déduire la valeur de  $\lambda$  correspondante.
  - (c) Pour l'uranium 238, on sait que  $\lambda = 1,54 \times 10^{-10} \text{ s}^{-1}$ . En déduire sa demi-vie.
2. On considère un échantillon de césium 137 dont la demi-vie est de 30 ans.
  - (a) Si cet échantillon contient  $5,5 \times 10^{14}$  noyaux radioactifs, combien en contiendra-t-il 30 ans plus tard ? et 120 ans plus tard ?
  - (b) Déterminer le temps nécessaire pour que la quantité de noyaux radioactifs de l'échantillon soit divisée par 1 000.

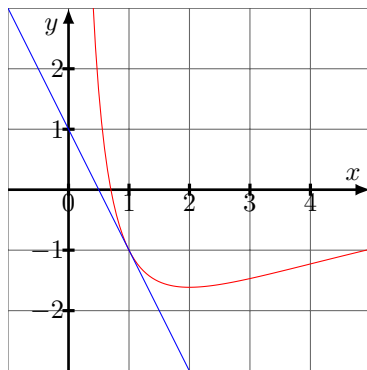
**Exercice 17:**

$\mathcal{C}$  est la représentation graphique d'une fonction  $f$  dans un repère orthonormal.  $T$  est la tangente à  $\mathcal{C}$  au point  $A(1; -1)$ .  $T$  passe par le point de coordonnées  $(0; 1)$ .

1. En déduire :
 

|            |             |                           |
|------------|-------------|---------------------------|
| (a) $f(1)$ | (b) $f'(1)$ | (c) Une équation de $T$ . |
|------------|-------------|---------------------------|
2. On sait que  $f(x) = 2 \ln(x) + \frac{a}{x} + b$  avec  $a, b$  deux réels.

- (a) Calculer  $f'(x)$ .  
 (b) Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$ .

**Exercice 18:**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- |                           |                               |
|---------------------------|-------------------------------|
| 1. $\ln(x+2) \geq \ln(5)$ | 4. $1 - 2\ln(x) \geq 3$       |
| 2. $3 + \ln(x) \leq 7$    | 5. $\ln(x) - 2 \leq \ln(x^2)$ |
| 3. $\ln(x-1) \geq 0$      | 6. $\ln(x) - 2\ln(3) \leq 5$  |

**Exercice 19:**

Quand l'oreille d'une personne normale est soumise à une pression acoustique  $x$  (en bar), l'intensité sonore (en dB) du bruit responsable de cette pression est donnée par  $f(x) = 8,68\ln(x) + 93,68$ .

- Déterminer l'intensité sonore correspondant à une pression acoustique de 14 bar.
- Déterminer la dérivée de  $f$ .
- Etudier les variations de  $f$  sur  $[0, 5; +\infty[$ .
- Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter le résultat obtenu.
- Une personne normale ne peut supporter une bruit supérieur à 119,32 dB. Déterminer la pression maximale que l'oreille d'une personne normale peut supporter.

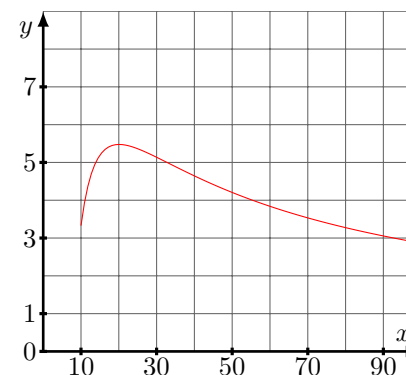
**Exercice 20:**

La capacité pulmonaire d'une personne est la quantité d'air (en L) pouvant être inspirée. Dans le cas d'une inspiration forcée, à partir de l'âge de 10 ans, la capacité pulmonaire d'une personne peut être modélisée en fonction de son âge  $x$  (en année) par la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{110(\ln(x) - 2)}{x}$ .

- La courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[10; 100]$ , dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Estimer graphiquement :

- L'âge auquel la capacité pulmonaire est maximale ;
- L'âge à partir duquel un adulte a une capacité pulmonaire inférieure à celle d'un enfant de dix ans.

- Calculer  $f'(x)$ .
  - Résoudre l'inéquation  $3 - \ln(x) > 0$ .
  - Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$  sur  $[10; 100]$ .
  - En déduire l'âge auquel la capacité pulmonaire est maximale. Donner la valeur exacte de cette capacité maximale.

**Exercice 21:**

Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$ .

- $f : x \mapsto -\frac{1}{x(x-1)}$  et  $F : x \mapsto \ln(x) - \ln(x-1)$
- $f : x \mapsto \frac{2\ln(x) + x}{x}$  et  $F : x \mapsto (\ln(x))^2$

**Exercice 22:**

On détermine l'acidité ou le pH d'une solution en mesurant sa concentration d'ions  $\text{H}_3\text{O}^+$ . Le pH est défini par la formule  $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$  où  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  est la concentration en ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  en mole par litre.

- Le pH idéal d'une piscine est compris entre 7,2 et 7,8. Déterminer les concentrations de  $\text{H}_3\text{O}^+$  correspondantes.
- Avec un pH-mètre, on trouve qu'une piscine a un pH de 8,1. On augmente la concentration en  $\text{H}_3\text{O}^+$  de 75%. Le pH retrouve-t-il une valeur convenable ?

- La concentration en  $\text{H}_3\text{O}^+$  du citron est de  $10^{-2}$  mol/L. Déterminer son pH.
- Si le pH augmente de 0,1, comment évolue la concentration en  $\text{H}_3\text{O}^+$ ?
- Si la concentration en  $\text{H}_3\text{O}^+$  est multipliée par 100, comment se comporte le pH ?

**Exercice 23:**

On appelle niveau d'intensité sonore le nombre  $L = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$  où  $I$  est l'intensité sonore de la source et  $I_0 = 10^{-12}$  W.m<sup>-2</sup> le seuil d'audibilité.  $L$  s'exprime en dB. On admet que si plusieurs dispositifs sont placés à proximité, les intensités sonores s'ajoutent. Les niveaux d'intensité sonore de deux avions ont été mesurés à 2 km du toucher des roues :

- Airbus A340 : 82 dB
- Boeing 747 : 92 dB

- Quelle est, pour chaque avion, l'intensité sonore correspondante ?
- Donner, pour chaque question, la valeur exacte et une valeur arrondie à l'unité.
  - Quel est le niveau d'intensité sonore correspondant à deux Boeing 747 atterrissant en même temps ?
  - Combien de dB émettent trois Airbus A340 atterrissant ensemble ?
  - L'aéroport d'Atlanta possède cinq pistes en parallèle. Quel est le niveau d'intensité sonore maximale à laquelle il faut s'attendre ?
- La sonnerie d'un téléphone portable émet 60 dB. Combien de téléphones portables doit-on faire sonner en même temps pour émettre autant de décibels qu'un Airbus A340 ?

**Exercice 24:**

Un réservoir contient 1 000 litres d'eau douce dont la salinité est de 0,12 g/L. A la suite d'un accident regrettable, de l'eau de mer pénètre dans ce réservoir à raison de 10 litres par minute. On note  $s$  la salinité de l'eau du réservoir,  $s$  est une fonction du temps  $t$  (en minutes). On admet que  $s$  est solution de l'équation différentielle:

$$(E) : s'(t) + 0,01s(t) = 0,39$$

- Résoudre l'équation différentielle (E).
- Considérant qu'à l'instant  $t = 0$ , la salinité de l'eau du réservoir était de 0,12 g/L. Montrer que l'on a  $s(t) = 39 - 38,88e^{-0,01t}$ .
- Déduire du résultat précédent la salinité de l'eau du réservoir 60 minutes après le début de l'incident.

- De combien de temps le service de surveillance dispose-t-il pour arrêter l'arrivée de l'eau salée si, pour réduire les conséquences de l'incident, la salinité doit rester inférieure à 3,9 g/L ?

**Exercice 25:**

Pierre possède une piscine naturelle de 80 000 litres d'eau. Des plantes épuratives jouent le rôle de filtration naturelle. Afin d'améliorer l'oxygénation de l'eau, Pierre décide de recycler en permanence une partie de l'eau de la piscine en la remplaçant par l'eau d'un puits voisin. Malheureusement, Pierre ne sait pas que l'eau du puits, captée par une pompe, est contaminée par des germes.

Avant la mise en route de la pompe, l'eau de la piscine n'est pas contaminée par aucune germe. La quantité d'eau contaminée au cours du temps est modélisée par une fonction  $f$ . Lorsque le temps  $t$  représente le temps écoulé, en heures, depuis la mise en route de la pompe,  $f(t)$  représente la quantité, en litres, d'eau contaminée venant du puits au bout de  $t$  heures de pompage. On admet que  $f$  est solution de l'équation différentielle :

$$y' = -0,00625y + 30$$

- Donner les solutions de cette équation différentielle sur  $[0; +\infty[$ .
  - Sachant que  $f(0) = 0$ , déterminer une expression de  $f(t)$  en fonction de  $t$ . On admet pour la suite que  $f(t) = 4\,800(1 - e^{-0,00625t})$ .
- Calculer, en litres, la quantité d'eau contaminée venant du puits au bout de 72 heures.
- Calculer  $f'(t)$ .
  - Justifier que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 4\,800$ .
  - En déduire le tableau de variation de  $f$ .
  - Ce sens de variation de la fonction  $f$  est-il cohérent avec la situation étudiée ? Pourquoi ?
- La piscine devient dangereuse pour la peau lorsque la quantité d'eau contaminée dépasse 6% du volume d'eau de la piscine. Cette piscine peut-elle être dangereuse pour la peau ? Justifier.
- La piscine devient impropre à la baignade lorsque la quantité d'eau contaminée dépasse 3% du volume d'eau de la piscine. Déterminer, à l'heure près, au bout de combien de temps l'eau de la piscine deviendra impropre à la baignade.