

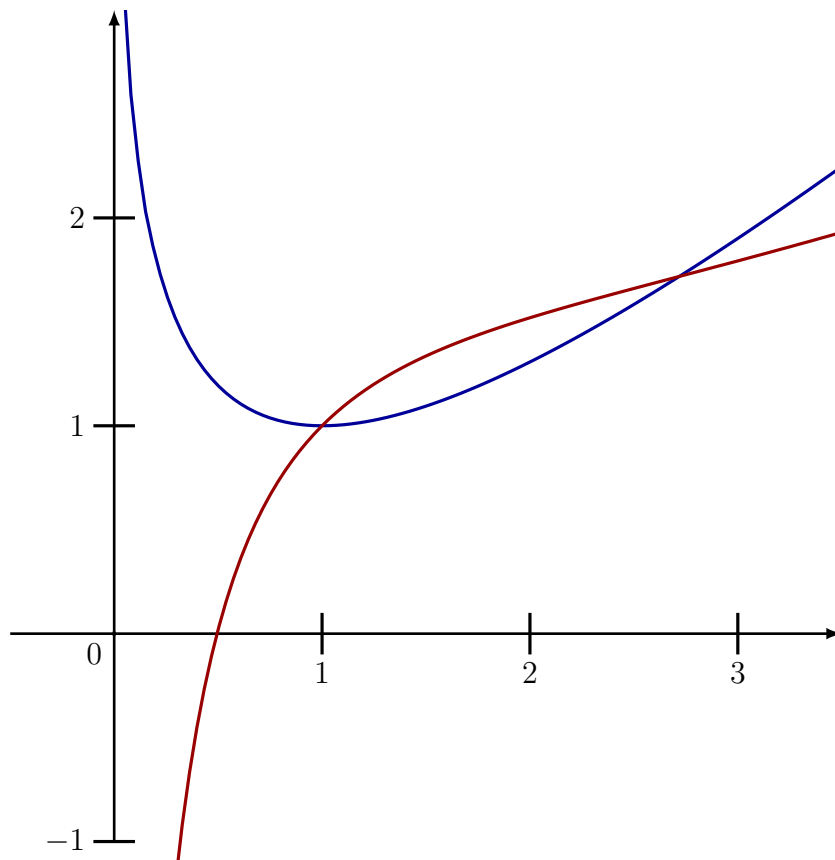
Exercice 1 : Métropole, 1999, STI

Le but du problème est d'étudier la position relative de deux courbes et de calculer l'aire du domaine plan compris entre ces dernières.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Sur le graphique ci-dessous ont été tracées les courbes représentatives C et Γ respectivement des deux fonctions f et g , définies pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; 3]$, par :

$$f(x) = x - \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = x - (\ln x)^2.$$



Partie A : Étude des fonctions f et g .

1. (a) Déterminer, en justifiant vos calculs, la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
 (b) On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; 3]$. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $]0 ; 3]$.
2. On désigne par g' la fonction dérivée de g sur $]0 ; 3]$. Calculer $g'(x)$.
 En admettant que $(x - 2 \ln x)$ est positif sur $]0 ; 3]$, en déduire que g est strictement croissante sur $]0 ; 3]$.
3. Désigner sur le graphique la courbe C et la courbe Γ .

Partie B : Position relative des deux courbes.

1. (a) Résoudre sur $]0 ; 3]$, l'équation $g(x) = f(x)$.
 (b) En déduire les coordonnées des points d'intersection M et N des courbes C et Γ . Placer M et N sur le graphique.

2. (a) Résoudre sur $]0 ; 3]$, l'inéquation $g(x) \geq f(x)$.
- (b) En déduire la position relative des courbes C et Γ sur l'intervalle $[1 ; e]$.

Partie C : Calcul d'une aire.

1. On désigne par D l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tels que :

$$(1 \leq x \leq e) \quad \text{et} \quad (f(x) \leq y \leq g(x)).$$

et par A son aire exprimée en cm^2 .

On admet que, en unités d'aire, on a : $A = \int_1^e (g(x) - f(x)) \, dx$

2. Hachurer D sur le graphique.
3. Soit la fonction H définie sur $[1 ; e]$ par : $H(x) = -x(\ln x)^2 + 3x \ln x - 3x$.
 - (a) Vérifier que la fonction H est une primitive de la fonction $g - f$ sur $[1 ; e]$.
 - (b) Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de A .
 - (c) En donner une valeur approchée au mm^2 près par excès.

Solution :