

Exercice 1 : Polynésie, 1999, STI

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique : 2 cm).

On note H le point de coordonnées $(\ln 3 ; \ln 3)$.

Partie A

Soient a et b deux nombres réels. On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 3}.$$

1. Calculer $g'(x)$.
2. Déterminer a et b pour que la courbe représentative de la fonction g passe par le point H et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel x , on a : $f(x) = x - 2 + \frac{12}{e^x + 3}$.
2. En utilisant l'une des deux écritures de $f(x)$ déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout réel x , $f'(x) \geq 0$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f .

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}.$$

2. En déduire la primitive de la fonction f qui prend la valeur 2 pour $x = 0$.

Exercice 2 : Antilles-Guyane, 2000, STI

On considère la fonction f , de courbe représentative $\mathcal{C}_f$, définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$$

Partie A

1. (a) Vérifier que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$:

$$f(x) = e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

- (b) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

2. (a) Vérifier que, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}.$$

- (b) Étudier, pour tout x de l'intervalle I, le signe de $f'(x)$.

En déduire le sens de variations de la fonction f et que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) > 0$.

3. (a) Résoudre l'équation $f(x) = \frac{9}{2}$.

- (b) Déduire, du résultat obtenu à la question précédente, les coordonnées des points A et B, points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite dont une équation est $y = \frac{9}{2}$.

(A est le point d'intersection dont l'abscisse est la plus petite.)

Partie B

Soit la fonction g , de courbe représentative $\mathcal{C}_g$ représentée ci-contre, définie pour tout $x \in]0; +\infty[$, par:

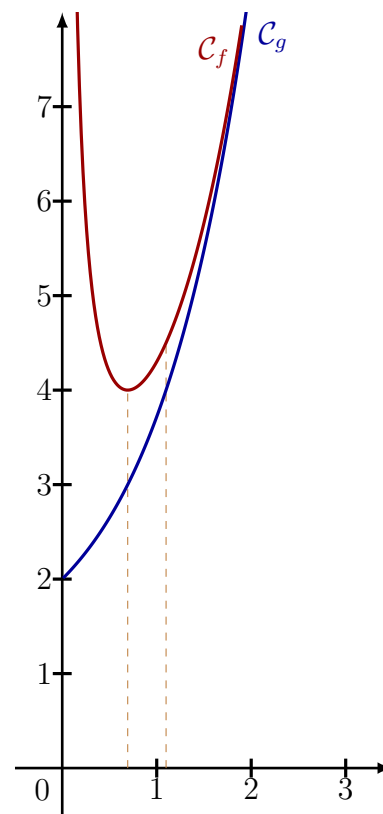
$$g(x) = e^x + 1$$

On note h la fonction définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par:

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

- Étudier, pour tout $x \in]0; +\infty[$, le signe de $h(x)$; en déduire la position de la courbe $\mathcal{C}_f$, par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$.
- Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - 1$$



En déduire une fonction primitive de h sur $]0; +\infty[$.

- Calculer l'aire S de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = \ln 2$ et $x = \ln 3$.

(Exprimer le résultat en cm^2 .)